11. 복소평면

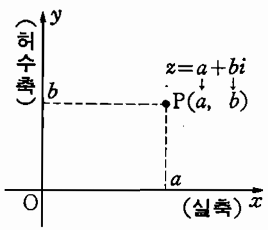
§ 1. 복소평면

기 본 정 석

1 복소평면(가우스평면)

평면 위의 직교 좌표에서 점 $P(a, b)$가 복소수 $z=a+bi$에 대응될 때 이 평면을 **복소평면** 또는 **가우스평면**이라 부른다.

$$P(a, b) \longleftrightarrow z=a+bi$$

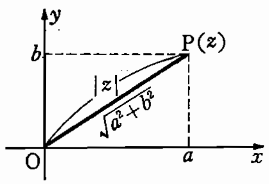


그리고, 복소수 z를 나타내는 점 P를 간단히 $P(z)$ 또는 **점 z**라 하고, 복소평면에서 x축을 **실축**, y축을 **허수축**이라 한다.

2 복소수의 절대값

복소수 $z=a+bi$에서 $\sqrt{a^2+b^2}$을 z의 **절대값**이라 하고, $|z|$로 나타낸다. 곧,

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$



또, z의 절대값인 $|z|$는 복소평면 위에서 원점과 점 z 사이의 거리를 나타낸다.

그리고, 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때 z와 $\bar{z}$ 사이에는 다음과 같은 성질이 있다.

$$|z|=|\bar{z}|,\quad z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$$

Advice 1° **복소평면(가우스평면)**

실수를 직선 위의 점과 일대일로 대응시켜서 수직선을 생각한 것과 마찬가지로, 복소수를 평면 위의 점과 일대일로 대응시킬 수 있다.

곧, 평면 위에 한 좌표축을 잡고,

복소수 $z=a+bi$를 점 $P(a, b)$에 대응

시키기로 하면 하나의 복소수는 평면 위의 한 점으로 나타나게 되고,

역으로 평면 위의 한 점은 하나의 복소수를 나타내게 되어

복소수 전체와 평면 위의 점 전체는 일대일로 대응된다.

이와 같이 복소수를 나타내는 데 쓰이는 평면을 **복소평면**이라 한다.

보기 1. 다음 각 복소수를 나타내는 점을 복소평면 위에 도시하여라.

(1) $3+2i$　(2) $-3-2i$　(3) i　(4) -2

연구 일반적으로 복소수 $a+bi$가 나타내는 점은

실수부 a를 x좌표, 허수부 b를 y좌표

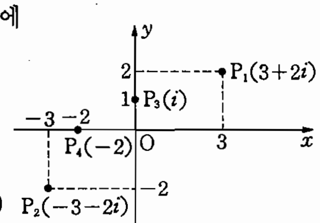
라 하여 점 (a, b)를 평면 위의 직교 좌표에 나타내면 된다. 곧,

(1) $P_1(3+2i) \longleftrightarrow P_1(3, 2)$

(2) $P_2(-3-2i) \longleftrightarrow P_2(-3, -2)$

(3) $P_3(i)=P_3(0+1\cdot i) \longleftrightarrow P_3(0, 1)$

(4) $P_4(-2)=P_4(-2+0\cdot i) \longleftrightarrow P_4(-2, 0)$



과 같은 대응을 생각하면 오른편과 같다.

이 보기에서 알 수 있는 바와 같이 실수는 x축 위의 점으로 나타내어지고, 순허수는 y축 위의 점으로 나타내어지므로 x축을 **실축**, y축을 **허수축**이라고 한다.

보기 2. z를 복소수라 할 때 복소평면 위에서 다음 두 복소수 사이의 위치 관계를 조사하여라. 단, (2)에서 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.

(1) 점 z와 점 $-z$

(2) 점 z와 점 $\bar{z}$

연구 $z=a+bi$라 하면

$-z=-a-bi \longleftrightarrow (-a, -b)$

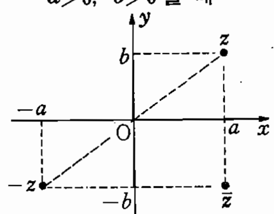
$\bar{z}=a-bi \longleftrightarrow (a, -b)$

가 되므로 복소평면 위에서

점 z, 점 $-z$, 점 $\bar{z}$

를 도시하면 오른편과 같다.

$a>0,\ b>0$일 때



그림에서는 편의상 $a>0, b>0$인 경우에 대하여 표시한 것이지만 기타의 경우에 대해서도 이를 도시해 보면 다음 사실을 알 수 있다.

定石 복소수 z에 대하여

점 z와 점 $-z$는 원점에 관해서 대칭이다.

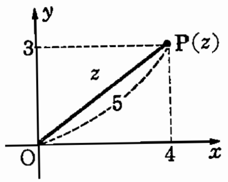
점 z와 점 $\bar{z}$는 실축(x축)에 관해서 대칭이다.

Advice 2° **복소수의 절대값**

이를테면 복소수 $z=4+3i$ 를 복소평면 위에 도시하면 오른편 그림의 $\mathrm{P}(z)$ 로 나타내어지며, 이 때 원점 O와 P와의 거리 곧,

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

를 z 의 **절대값**이라 하고, $|z|$ 로 나타낸다.



定石 $z=a+bi$(a, b 는 실수)일 때 $\Longrightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$

곧, $|z|$ 는 원점에서 점 z 까지의 거리로서 z 가 실수인 경우에는 이 정의는 실수의 절대값의 정의와 일치한다. (다음 보기의 (4))

보기 3. 다음 각 복소수에 대한 절대값을 구하여라.

(1) $2+3i$ (2) $3-2i$ (3) i (4) -2

연구 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ (단, a, b 는 실수)를 이용한다.

(1) $a=2$, $b=3$ 인 경우이므로 $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

(2) $a=3$, $b=-2$ 인 경우이므로 $|3-2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

(3) $a=0$, $b=1$ 인 경우이므로 $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$

(4) $a=-2$, $b=0$ 인 경우이므로 $|-2|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

Advice 3° **복소수의 절대값의 성질**

복소수 z 의 절대값의 정의에 의해서 다음 성질이 성립한다.

① $|z|=|\overline{z}|$ ② $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

(증명) $z=a+bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$ 이다.

① $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\overline{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ $\therefore |z|=|\overline{z}|$

② $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

$|z|^2=|a+bi|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$

$|\overline{z}|^2=|a-bi|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$

$\therefore z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

이 결과는 문제 해결에 자주 이용되므로 기억해 두는 것이 좋다.

보기 4. 복소수 z 와 복소수 $\dfrac{1}{z}$ 이 서로 켤레복소수이면 $|z|=1$ 임을 보여라.

연구 z 의 켤레복소수 $\overline{z}$ 가 $\dfrac{1}{z}$ 과 같다는 것이므로

$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ $\therefore z\overline{z}=1$ $\therefore |z|^2=1$ $\Leftarrow z\overline{z}=|z|^2$

$|z|\geq 0$ 이므로 $|z|=1$

필수 예제 11-1. 임의의 복소수 z 에 대하여 $\alpha z+\beta\overline{z}$ 가 실수이면 $\alpha=\overline{\beta}$ 임을 증명하여라. 단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.

정석연구 이 문제는 수학 Ⅰ에서 다루어도 무방한 문제이지만, 수학 Ⅰ에서 다룬 켤레복소수에 관한 성질의 복습을 겸해서 여기에 소개한 것이다. 곧,

定石 복소수 α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때

① $\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$ ② $\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ ③ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ ④ $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

에서 ①, ②, ④를 활용하는 문제이다.

또, 이 문제를 해결하는 데 있어 중요한 성질로서 실수의 켤레복소수는 자기 자신과 같다는 사실이다.

곧, 2의 켤레복소수는 2, -3의 켤레복소수는 -3인 것과 같이

定石 z 가 실수 $\Longleftrightarrow z=\overline{z}$

이다.

모범답안 문제의 조건에서 $\alpha z+\beta\overline{z}$ 가 실수이므로

$$\alpha z+\beta\overline{z}=\overline{\alpha z+\beta\overline{z}}$$

$\therefore \alpha z+\beta\overline{z}=\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z$ $\therefore (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}$

$\therefore (\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})}\,\overline{z}$ 곧, $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$

따라서, $(\alpha-\overline{\beta})z$ 는 실수이다.

이것이 임의의 복소수 z 에 대하여 실수가 되려면

$\alpha-\overline{\beta}=0$ 곧, $\alpha=\overline{\beta}$

Note $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $z=x+yi$ (단, a, b, c, d, x, y 는 실수)로 놓고서

$$\alpha z+\beta\overline{z}=\mathrm{A}+\mathrm{B}i \text{ (단, A, B 는 실수)}$$

의 꼴로 고친 다음, $\mathrm{B}=0$ 으로 놓아 증명할 수도 있으나 중간 계산이 약간 복잡해 진다.

유제 11-1. α, β 가 복소수일 때 $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ 는 실수임을 증명하여라.

Hint $\overline{\overline{\alpha}\beta}=\alpha\overline{\beta}$ 이므로 $\alpha\overline{\beta}$ 와 $\overline{\alpha}\beta$ 는 서로 켤레복소수이다.

유제 11-2. $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ 가 실수가 되기 위한 조건을 구하여라.

단, α 의 허수부는 0이 아니고, $\alpha\neq\pm i$ 이다. 답 $\alpha\overline{\alpha}=1$

Hint $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}=\overline{\left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)}$ 에서 $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}=\dfrac{\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha}^2}$ $\therefore (\alpha-\overline{\alpha})(\alpha\overline{\alpha}-1)=0$

필수 예제 11-2. α, z는 복소수이고, $|z-\alpha|=|1-\overline{\alpha}z|$일 때 $|z|$의 값을 구하여라. 단, $|\alpha|$는 1이 아니다.

정석연구 $z=p+qi$, $\alpha=c+di$ (p, q, c, d는 실수)로 놓고, 이것을 준 식에 대입하면

$$|(p-c)+(q-d)i|=|(1-pc-qd)+(pd-qc)i|$$

가 된다. 이것을 복소수의 절대값의 정의

定石 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

에 따라 고쳐 쓰면

$$\sqrt{(p-c)^2+(q-d)^2}=\sqrt{(1-pc-qd)^2+(pd-qc)^2}$$

이 되며, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(p^2+q^2-1)(c^2+d^2-1)=0$$

그런데, $|\alpha|\neq 1$이므로 $\sqrt{c^2+d^2}\neq 1$ $\quad\therefore\ c^2+d^2\neq 1$

$\therefore\ p^2+q^2=1 \qquad \therefore\ |z|=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{1}=1$

이와 같은 방법으로 해결해도 되지만, 앞에서 공부한

定石 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, $\quad\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$, $\quad\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$

인 성질을 이용하면 아래와 같이 간단히 해결된다.

모범답안 $|z-\alpha|=|1-\overline{\alpha}z|$에서 $|z-\alpha|^2=|1-\overline{\alpha}z|^2$

$$\therefore\ (z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}=(1-\overline{\alpha}z)\overline{(1-\alpha z)}$$

$$\therefore\ (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})$$

이 식을 전개하여 정리하면

$$z\overline{z}-z\overline{\alpha}-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=1-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}$$

$$\therefore\ (z\overline{z}-1)(\alpha\overline{\alpha}-1)=0$$

그런데, $|\alpha|\neq 1$이므로 $\alpha\overline{\alpha}-1\neq 0$ $\quad\therefore\ z\overline{z}=1$ $\quad\therefore\ |z|=1$ ← 답

유제 11-3. 복소수 z와 w 사이에 $w=\dfrac{2-z}{1-2z}$, $|z|=1$인 관계가 있을 때 $w\cdot\overline{w}$를 구하여라.

Hint $|z|=1$이므로 $z\cdot\overline{z}=1$ 답 1

유제 11-4. α, β를 복소수라 하고 $|\alpha|=1$, $\alpha\neq\beta$일 때 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|$의 값을 구하여라.

Hint $|z|^2=z\cdot\overline{z}$를 이용하여 먼저 제곱의 값을 구해 보아라. 답 1

§ 2. 복소수의 덧셈과 뺄셈

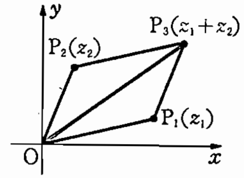
기 본 정 석

1 복소수의 합 (z_1+z_2)의 작도

복소수 z_1, z_2를 나타내는 점 P_1, P_2가 주어져 있을 때

합 ; $z=z_1+z_2$

를 나타내는 점 P_3의 작도는 OP_1, OP_2를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 구하면 된다.



2 복소수의 차 (z_1-z_2)의 작도

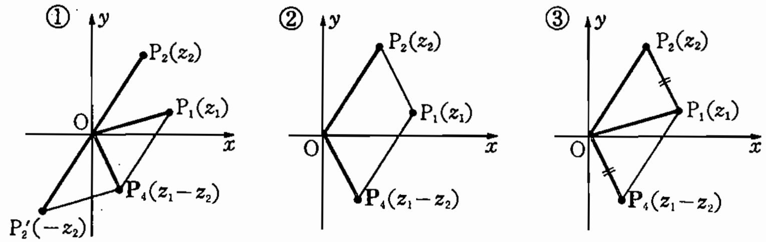
복소수 z_1, z_2를 나타내는 점 P_1, P_2가 주어져 있을 때

차 ; $z=z_1-z_2$

를 나타내는 점 P_4의 작도는 다음 두 가지 방법이 있다.

(i) P_2의 O에 관한 대칭점 P_2'를 구하고 OP_1, OP_2'를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 구한다. (아래 그림 ①)

(ii) OP_2, P_2P_1을 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 구한다. (아래 그림 ②)



3 두 점 사이의 거리

두 점 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$를 잇는 선분의 길이 P_1P_2는 위 그림 ③에서

$$\overline{P_1P_2}=\mathrm{OP_4}=|z_1-z_2|$$

4 선분 P_1P_2의 내분점, 외분점, 중점

복소평면에서 두 점 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$를 잇는 선분 P_1P_2를

$m:n$으로 내분점 ; $\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$, 외분점 ; $\dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}$, 중점 ; $\dfrac{z_1+z_2}{2}$

Advice 1° 복소수의 합과 차의 작도

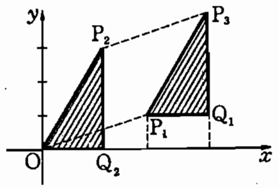
복소수의 덧셈, 뺄셈은 이미 수학 I 에서 배웠으나, 여기서는 그 의미를 더욱 분명하게 하기 위해 복소평면 위에서 생각해 보기로 한다.

▶ **복소수의 합 (z_1+z_2) 의 작도**

이를테면, $z_1=3+i$, $z_2=2+3i$ 라 하면 $z_1+z_2=5+4i$ 가 되며, z_1, z_2, z_1+z_2 를 나타내는 점을 각각 P_1, P_2, P_3 라 하면

$P_1(3,\ 1)$, $P_2(2,\ 3)$, $P_3(5,\ 4)$

이므로 이들을 평면 위에 잡으면 ▱ $OP_1P_3P_2$ 는 평행사변형임을 알 수 있다.



일반적으로 복소수

$$z_1=a+bi,\quad z_2=c+di$$

를 나타내는 점을 P_1, P_2 라 하면

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

이고, 여기서 $P_1(a,\ b)$, $P_2(c,\ d)$ 이므로 z_1+z_2 에 대응하는 점을 P_3 라 하면 $P_3(a+c,\ b+d)$ 이다. 이들 P_1, P_2, P_3 를 평면 위에 잡으면

$\triangle OQ_2P_2\equiv\triangle P_1Q_1P_3$ 이므로 $OP_2=P_1P_3$, $OP_2 /\!/ P_1P_3$

따라서, 사각형 $OP_1P_3P_2$ 는 평행사변형이다.

곧, z_1+z_2 를 나타내는 점은 OP_1, OP_2 를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4 의 꼭지점이다. 이 성질을 **평행사변형의 법칙**이라 한다.

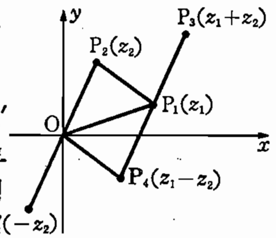
▶ **복소수의 차 (z_1-z_2) 의 작도**

다음 두 가지 방법을 생각할 수 있다.

(i) z_1-z_2 는 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ 로 변형되므로

z_1-z_2 는 z_1 과 $(-z_2)$ 의 합을 작도

하면 된다. 곧, $(-z_2)$ 에 대응하는 점을 P_2' 라 하면 P_2, P_2' 는 원점에 관하여 대칭이므로 OP_1, OP_2' 를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4 의 꼭지점이 P_4 이다.



(ii) $z_1-z_2=z_4$ 라 하면 $z_2+z_4=z_1$

따라서, z_4 에 대응하는 점을 P_4 라 하면 사각형 $OP_2P_1P_4$ 는 평행사변형이므로 OP_2, P_2P_1 을 이웃 두 변으로 하는 평행사변형을 만들면 그 제 4 의 꼭지점이 z_1-z_2 에 대응하는 점 P_4 가 된다.

Note 그림에서 P_1 은 P_3, P_4 의 중점이 된다.

보기 1. 다음 각 경우에 z_1+z_2, z_1-z_2 를 복소평면 위에 나타내어라.

(1) $z_1=3$, $z_2=2i$ (2) $z_1=3+2i$, $z_2=2+3i$

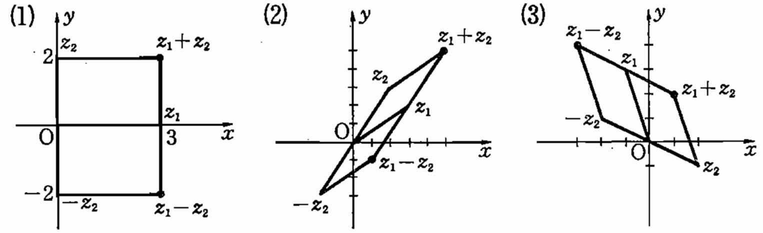
(3) $z_1=-1+3i$, $z_2=2-i$

연구 실제로 z_1+z_2, z_1-z_2 를 계산하면

(1) $z_1+z_2=3+2i$, $z_1-z_2=3-2i$ (2) $z_1+z_2=5+5i$, z_1-z_2

(3) $z_1+z_2=1+2i$, $z_1-z_2=-3+4i$

이므로 이것을 복소평면 위에 나타내어도 좋고, 평행사변형의 법칙을 이용해도 좋다.



Advice 2° 두 점 P_1, P_2 사이의 거리

복소평면 위에서 점 z_1, 점 z_2 사이의 거리는 위의 그림으로부터 원점과 점 z_1-z_2 사이의 거리로서, $|z_1-z_2|$ 임을 알 수 있다.

이것은 식에 의해서는 다음과 같이 설명된다.

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ 를 나타내는 점을 각각 P_1, P_2 라 하면

$P_1(a,\ b)$, $P_2(c,\ d)$

$$\therefore\ P_1P_2=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=|(a-c)+(b-d)i|$$
$$=|(a+bi)-(c+di)|=|z_1-z_2|$$

보기 2. 다음 두 점 z_1, z_2 사이의 거리 d 를 구하여라.

(1) $z_1=2+5i$, $z_2=-4+i$ (2) $z_1=3-4i$, $z_2=-2+i$

연구 다음 두 가지 방법을 생각할 수 있다.

(i) (1) $d=|z_1-z_2|=|(2+5i)-(-4+i)|=|6+4i|=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

(2) $d=|z_1-z_2|=|(3-4i)-(-2+i)|=|5-5i|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

(ii) (1) z_1, z_2 를 나타내는 점은 각각 $(2,\ 5)$, $(-4,\ 1)$ 이므로

$d=\sqrt{(2+4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$

(2) z_1, z_2 를 나타내는 점은 각각 $(3,\ -4)$, $(-2,\ 1)$ 이므로

$d=\sqrt{(3+2)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$

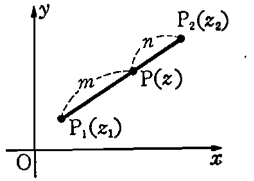
Advice 3° 선분 P_1P_2의 내분점, 외분점, 중점

두 개의 복소수

$$z_1=x_1+y_1i,\quad z_2=x_2+y_2i$$

를 나타내는 복소평면 위의 두 점을 각각 P_1, P_2라 하면

$$P_1(x_1,\ y_1),\quad P_2(x_2,\ y_2)$$



이므로 선분 P_1P_2를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라고 하면

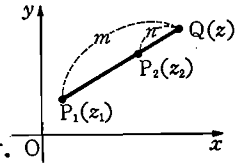
$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

따라서, 복소평면에서 이 점을 나타내는 복소수는 다음과 같이 된다.

$$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}+\frac{my_2+ny_1}{m+n}i=\frac{m(x_2+y_2i)+n(x_1+y_1i)}{m+n}=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\cdots①$$

같은 방법으로 하여

P_1P_2를 $m:n$으로 외분하는 점을 Q라고 하면 Q를 나타내는 복소수는 $\dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}$이 된다.



특히, P_1P_2의 중점은 ①에서 $m=n$일 때이므로 P_1P_2의 중점을 나타내는 복소수는 $\dfrac{z_1+z_2}{2}$가 된다.

이상을 정리하면 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$를 잇는 선분을

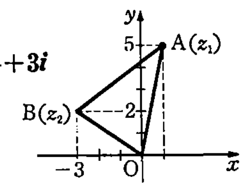
$m:n$으로 내분점 ; $\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$, 외분점 ; $\dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}$, 중점 ; $\dfrac{z_1+z_2}{2}$

보기 3. 복소평면에서 $z_1=1+5i$, $z_2=-3+2i$를 나타내는 점을 각각 A, B라 할 때 다음을 구하여라. 단, O는 원점이다.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 (2) $\triangle$AOB의 무게중심

연구 (1) ①식에서 $m=2$, $n=1$인 경우이다.

$$\frac{2\cdot z_2+1\cdot z_1}{2+1}=\frac{2(-3+2i)+(1+5i)}{3}=-\frac{5}{3}+3i$$



(2) AB의 중점을 M이라 하면 점 M은

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{(1+5i)+(-3+2i)}{2}=-1+\frac{7}{2}i$$

그런데, 무게중심은 OM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{2\left(-1+\frac{7}{2}i\right)+1\times0}{2+1}=-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}i$$

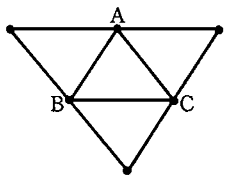
定石 점 z_1, z_2, z_3의 무게중심은 $\Longrightarrow \dfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$

필수 예제 11-3. 복소평면 위에서 세 점 $3+3i$, $-5i$, $-2+i$를 꼭지점으로 하는 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 나타내는 복소수 중에서 그 절대값이 최소인 것을 구하여라.

정석연구 평행사변형의 네 꼭지점 중 세 점 A, B, C가 주어질 때 제 4의 꼭지점은

AB가 대각선인 것, BC가 대각선인 것, CA가 대각선인 것

의 세 경우를 생각할 수 있다.



定石 점 z_1과 점 z_2의 중점 $\Longrightarrow \dfrac{z_1+z_2}{2}$

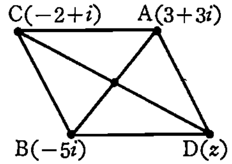
모범답안 $A(3+3i)$, $B(-5i)$, $C(-2+i)$라 하고, 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 $D(z)$라 한다.

(i) AB가 대각선일 때

선분 AB, CD의 중점이 일치하므로

$$\frac{(3+3i)+(-5i)}{2}=\frac{(-2+i)+z}{2}$$

$$\therefore\ z=5-3i$$



같은 방법으로 하면

(ii) AC가 대각선일 때 $z=1+9i$

(iii) BC가 대각선일 때 $z=-5-7i$

그런데, $|5-3i|=\sqrt{34}$, $|1+9i|=\sqrt{82}$, $|-5-7i|=\sqrt{74}$이므로 이 중에서 절대값이 최소인 것은 $5-3i$이다. 답 $5-3i$

유제 11-5. 복소평면 위에 세 점 $P_1(2+3i)$, $P_2(-1-2i)$, $P_3(3-i)$가 있을 때, 선분 P_1P_2, P_1P_3를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형의 제 4의 꼭지점을 구하여라. 답 $-6i$

유제 11-6. 복소평면 위에 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A를 나타내는 복소수가 $1+2i$이며, 변 AB, BC의 중점을 나타내는 복소수가 각각 $5+3i$, $9+10i$일 때 점 B, C, D를 나타내는 복소수를 구하여라.

답 B ; $9+4i$, C ; $9+16i$, D ; $1+14i$

유제 11-7. 복소평면 위에 네 점 $A(a+i)$, $B(3+5i)$, $C(7+3i)$, $D(b-i)$가 있다. 사각형 ABCD가 마름모일 때 실수 a, b의 값을 구하여라. 답 $a=1$, $b=5$ or $a=5$, $b=9$

필수 예제 11-4. 복소평면 위에서 다음 식을 만족시키는 점 z는 어떤 도형을 그리는가? 단, α는 일정한 복소수이다.

(1) $|z-\alpha|=1$ (2) $|z+1|=|z-i|$ (3) $|z+i|+|z-i|=4$

정석연구 다음 두 가지의 방법을 생각할 수 있다.

(i) $z=x+yi$로 놓고 이것을 준 식에 대입하여 x, y에 관한 등식을 만들면 이것이 곧 z의 자취의 방정식이 된다.

이를테면 (1)의 경우를 생각해 보자!

$\alpha=a+bi$ (a, b는 일정한 실수), $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하면,

$z-\alpha=(x-a)+(y-b)i$ 이므로 $|z-\alpha|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore$ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=1$ 로부터 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$

따라서 구하는 자취는 점 (a, b)를 중심, 반지름 1인 원이다.

(ii) 아래 정석을 이용한다(모범답안 참조).

정석 $|z_1-z_2|$는 $\Longrightarrow$ 점 z_1과 점 z_2 사이의 거리

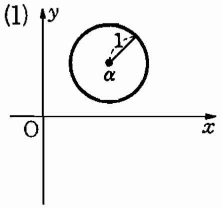
모범답안 (1) $|z-\alpha|$는 점 z와 점 α와의 사이의 거리를 나타내며, $|z-\alpha|=1$은 그 거리가 1이 되도록 점 z가 움직인다는 것이므로 점 z의 자취는 **점 α를 중심으로 하고 반지름 1인 원** ←답

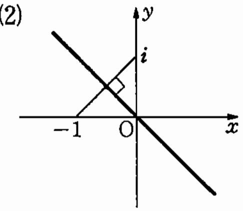
(2) 준 식을 고쳐 쓰면 $|z-(-1)|=|z-i|$이므로 점 z의 자취는 점 -1과 점 i에서 같은 거리에 있는 점, 곧

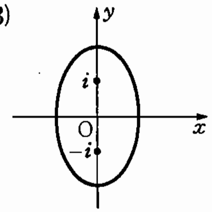
점 -1과 점 i를 맺는 선분의 수직 이등분선 ←답

(3) 준 식을 고쳐 쓰면 $|z-(-i)|+|z-i|=4$이므로 점 z의 자취는 점 $-i$와 점 i로부터의 거리의 합이 4인 점, 곧

점 $-i$와 점 i를 초점, 장축의 길이가 4인 타원 ←답

(1)


(2)


(3)


유 제 11-8. 복소평면에서 다음을 만족시키는 점 z의 자취를 구하라.

(1) $|z-1|=2$ (2) $|z+1|\sim|z-1|=0.4$

답 (1) **점 1을 중심으로 하고, 반지름 2인 원**
(2) **점 -1과 점 1을 초점, 주축의 길이가 0.4인 쌍곡선**

필수 예제 11-5. 조건 $2|z-3-3i|=|z|$를 만족하는 복소수 z 중에서 $|z|$가 최대인 것과 최소인 것을 구하여라.

정석연구 준 식을 고쳐 쓰면

$$|z|:|z-(3+3i)|=2:1 \qquad \cdots\cdots①$$

그런데, $|z|$은 원점과 점 z 사이의 거리이고,

$|z-(3+3i)|$는 점 $(3+3i)$와 점 z 사이의 거리

이므로 ① 식을 만족하는 z의 자취는

원점과 점 $(3+3i)$에서의 거리의 비가 $2:1$인 점의 집합이다.

일반적으로

정석 **AP : BP$=m:n$ $(m\neq n)$인 점 P의 자취는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원(Apollonius의 원)**

이라는 것에 착안하면 점 z의 자취는 원임을 알 수 있다.

모범답안 준 식을 고쳐쓰면

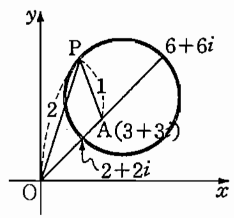
$$|z|:|z-(3+3i)|=2:1 \qquad \cdots\cdots①$$

z를 나타내는 점을 P, $3+3i$를 나타내는 점을 A, 원점을 O라 하면 ①로부터

OP : AP$=2:1$

이므로, 점 P의 자취는

선분 OA를 $2:1$로 내분하는 점과 $2:1$로 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원이다.



그런데, OA를 $2:1$로 내분하는 점은 $2+2i$, $2:1$로 외분하는 점은 $6+6i$이므로 **최대인 것 ; $6+6i$, 최소인 것 ; $2+2i$** ←답

Advice $z=x+yi$ (x, y는 실수)라 하여 조건식에 대입하면

$2|(x-3)+(y-3)i|=|x+yi|$에서 $2\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

이 식을 정리하면 점 (x, y)의 자취는 $(x-4)^2+(y-4)^2=8$임을 알 수 있다.

유 제 11-9. $|z-i|=2$를 만족하는 z에 대하여, $|z+3|$의 최대값과 최소값을 구하여라.

Hint 점 -3으로부터 점 i를 중심, 반지름 2인 원까지의 거리의 최대값, 최소값을 생각하여라. 답 **최대값 ; $2+\sqrt{10}$, 최소값 ; $-2+\sqrt{10}$**

필수 예제 11-6. 두 복소평면(Z 평면과 W 평면) 위의 점 z와 점 w 사이에 $w=z+\frac{1}{z}\,(z\neq 0)$인 관계가 있다고 한다. 점 z가 Z 평면위에서 원점을 중심, 반지름 2인 원 위를 한 번 돌아갈 때 z에 대응하는 점 w는 W 평면 위에서 어떤 도형을 그리는가?
$z=x+yi$, $w=u+vi$ (x, y, u, v는 상수)라 하여 u와 v 사이의 관계를 W 평면에 그려 넣어라.

정석연구 z가 반지름 2인 원 위를 움직인다는 것은 $|z|=2$를 의미한다.
따라서, 이 문제의 표현을 바꾸어 간단히 말하면
'$|z|=2$일 때
$w=z+\frac{1}{z}$을 만족하는 점 w의 자취를 도시하여라'
는 것과 같은 뜻이다.

모범답안 문제의 조건으로부터 $|z|=2$이므로

$$|z|=2 \iff |x+yi|=2 \iff x^2+y^2=4 \quad \cdots\cdots ①$$

또, $w=z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ ⇐ ①을 대입

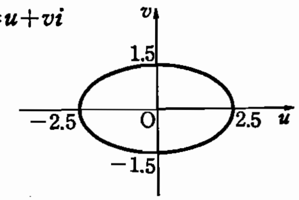
$$=x+yi+\frac{1}{4}(x-yi)=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}yi=u+vi$$

x, y, u, v는 실수이므로

$\frac{5}{4}x=u$, $\frac{3}{4}y=v$ $\therefore$ $x=\frac{4}{5}u$, $y=\frac{4}{3}v$

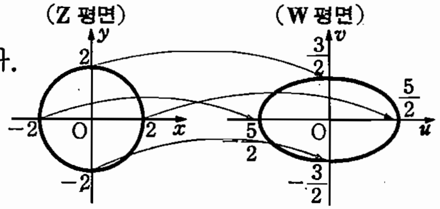
이것을 ①에 대입하면

$$\therefore \frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$



따라서 그림의 타원을 그린다.

Advice Z평면 위의 점 z의 자취와 W 평면 위의 점 w의 관계를 그림으로 살펴 보면 오른편과 같다.

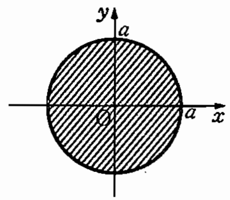


유 제 11-10. 복소평면 위에서 $z=x+yi$, $w=u+vi$, $w=(z+i)^2$이라 한다. 점 (x, y)가 직선 $y=0$, $y=x$ 위를 움직일 때 점 (u, v)가 그리는 자취를 각각 C_0, C_1이라 하고 이들의 그래프를 그려라.
또 점 $(-1, 0)$에서의 C_0, C_1의 접선이 이루는 각을 구하여라.

답 45°(그래프 생략)

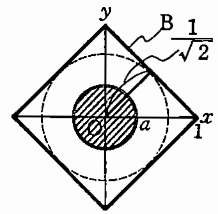
필수 예제 11-7. $z=x+yi$(x, y는 실수)일 때 다음에 답하라.
(1) 명제 「$|z|\leqq a$인 모든 복소수 z에 대하여 $|x|+|y|\leqq 1$이다」가 성립하는 양수 a의 최대값을 구하여라.
(2) 명제 「$|z|\leqq a$인 적어도 하나의 복소수 z에 대하여 $|z-3|\leqq 2$이다」가 성립하는 양수 a의 최소값을 구하여라.

정석연구 $|z|\leqq a$를 만족하는 z의 집합을 도시하는 요령은
(i) $|z|\leqq a$에서
$z=x+yi$ (x, y는 실수)로 놓으면
$|x+yi|\leqq a$ $\therefore$ $\sqrt{x^2+y^2}\leqq a$
$\therefore$ $x^2+y^2\leqq a^2$
따라서, 점 z의 집합은
원점을 중심으로 하고 반지름 a인 원의 내부이다. (경계선 포함)



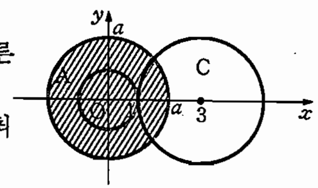
(ii) $|z|$는 원점과 점 z와의 거리이므로 $|z|\leqq a$를 만족하는 점 z의 집합은 원점에서의 거리가 a 이하인 점의 집합과 같다.

모범답안 복소평면에서 집합
$A=\{z\,|\,|z|\leqq a\}=\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2\leqq a^2\}$
$B=\{(x,\,y)\,|\,|x|+|y|\leqq 1\}$
$C=\{z\,|\,|z-3|\leqq 2\}=\{(x,\,y)\,|\,(x-3)^2+y^2\leqq 4\}$
를 생각한다.



(1) 준 명제는 「A⊂B」와 동치이므로 이 명제가 성립하기 위한 조건은 위의 그림에서 $0<a\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
따라서 a의 최대값은 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ← 답

(2) 준 명제는 「$A\cap C\neq\phi$」와 동치이므로 이 명제가 성립하기 위한 조건은 오른편 그림에서 $a\geqq 1$이다.
따라서, 이 명제가 성립하는 a의 최소값은 $a=1$ ← 답



유 제 11-11. 두 집합 A, B가
$A=\{z\,|\,|z+i|\geqq|z-1|\}$, $B=\{z\,|\,|z-2|\leqq k$, k는 양의 실수$\}$일 때 $B\subset A$가 되도록 하는 k의 최대값을 구하여라.

답 $\sqrt{2}$

연습문제 11

기본 **11-1.** $z=2+3i$ 일 때 다음 복소수의 켤레복소수를 각각 구하고, 이를 복소평면 위에 도시하여라.

(1) $\dfrac{1}{z}$ (2) $2z^2-z+1$ (3) $\dfrac{3z-1}{z+1}$

11-2. 삼차방정식 $x^3-5x^2+9x-5=0$ 의 세 근을 복소평면 위에 나타냈을 때, 이들 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 면적을 구하여라.

11-3. 복소평면 위에서 $2+i$, $3+4i$, $-1+2i$ 를 나타내는 점을 꼭지점으로 하는 삼각형을 실축에 따라 2만큼, 허수축에 따라 -3만큼 평행이동했을 때의 꼭지점을 각각 구하여라.

11-4. $z=1-i$ 일 때 $\left|z-\dfrac{1}{z}\right|^2$ 의 값을 구하여라.

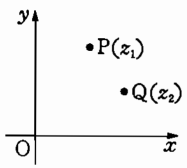
11-5. $|z+1|+(1-2i)z=15$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하여라.

11-6. 복소수 z_1, z_2 에 관하여 다음 등식을 증명하여라.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

11-7. 복소수 α, β 에 대해서 $|\alpha|=|\beta|=1$, $\alpha+\beta=1$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 구하여라.

11-8. 그림과 같이 복소평면 위에 점 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$ 가 주어져 있다. 다음 복소수를 나타내는 점을 도시하여라.



(1) $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ (2) $\dfrac{z_1-z_2}{2}$ (3) $\dfrac{\overline{z}_1-z_2}{2}$

11-9. 다음 두 복소수 z_1, z_2 를 복소평면 위의 정삼각형의 두 꼭지점이라 할 때 나머지 꼭지점을 구하여라.

(1) $z_1=3+2i$, $z_2=-3+2i$ (2) $z_1=1+i$, $z_2=1-i$

11-10. 이차방정식 $z^2+2az+1=0$ 이 허근을 가질 때 그 허근을 나타내는 복소평면 위의 점은 실수 a 가 변하면 어떤 도형 위를 움직이는가?

11-11. 복소평면에서 다음을 만족하는 점 z 는 어떤 도형을 그리는가?

(1) $z\overline{z}=1$ (2) $z+\overline{z}=1$ (3) $|z+2|=2|z-1|$

11-12. 복소평면에서 다음을 만족하는 점 z 는 어떤 도형을 그리는가?

(1) $(z-i)(\overline{z}+i)=1$ (2) $(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=r^2$ $(r>0)$

11-13. 다음 식을 만족하는 점 z 의 집합을 복소평면 위에 나타내어라.

(1) $1<|z|<2$ (2) $|z+2|>2|z-1|$

11-14. 복소수 z 가 $|z|\leq 1$, $(1-i)z+(1+i)\overline{z}\geq 2$ 를 동시에 만족시킬 때 $|z|$ 의 최소값을 구하여라.

실력 **11-15.** 복소수 α, β 에 대해서 $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$ 일 때 $|\alpha-\beta|$ 와 $|1-\overline{\alpha}\beta|$ 의 크기를 비교하여라.

11-16. $\omega^2+\omega+1=0$ 일 때 $|a\omega+b|=1$ 을 만족하는 정수 a, b 의 짝을 모두 구하여라.

11-17. x 는 실수, z 와 α 는 모두 복소수이고,

$$x(z-1)+\alpha=0, \quad |z|=1, \quad \alpha\neq 0$$

을 만족할 때 x, z 를 α, $\overline{\alpha}$ 를 써서 나타내어라.

11-18. 이차방정식 $x^2+\alpha x+1+2i=0$ 이 실근을 갖도록 하는 복소수 α 의 절대값의 최소값을 구하여라.

11-19. 복소평면 위에서 방정식 $z\overline{z}+3i(z-\overline{z})+5=0$ 을 만족하는 점 z 가 $a+bi$ 를 중심으로 하고 반지름 r 인 원을 나타내고, 이 원은 $|z+i|=k|z-2i|$ 를 만족하는 점 z 의 자취와 같다고 한다.

이 때, 실수의 상수 a, b, r, k 의 값을 구하여라.

11-20. 복소평면 위에서, 복소수 0, 1, $1+i$ 를 나타내는 점을 각각 O, A, B 라 한다. 복소수 z 를 나타내는 점이 $\triangle$OAB 의 둘레를 한 바퀴 돌 때 $w=z^2-2z$ 를 만족하는 점 w 는 어떤 도형을 그리는가?

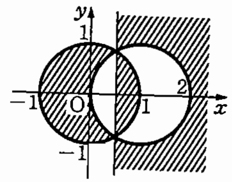
11-21. 복소평면 위에서 점 α 가 두 점 $1+i$ 와 $1-i$ 를 잇는 선분 위를 움직일 때 점 β 는 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원주위를 움직인다고 한다.

(1) 점 $\alpha+\beta$ 가 복소평면 위를 움직이는 범위의 면적을 구하여라.

(2) 점 $\alpha\beta$ 가 복소평면 위를 움직이는 범위의 면적을 구하여라.

11-22. 두 복소수 z 와 w 사이에 $w=\dfrac{1}{z}$ 인 관계가 있다. 복소평면 위에서 점 z 가 $|z-2i|\leq 1$ 을 만족하면서 변할 때 점 w 는 어떤 영역 안에 있는가?

11-23. 복소평면 위에서 복소수 z 가 나타내는 점이 오른편 그림의 빗금 부분(경계 포함)에 존재한다고 할 때, z 가 만족해야 할 조건을 부등식으로 나타내어라.



12. 복소수의 극형식

§ 1. 복소수의 극형식

기 본 정 석

1 복소수의 극형식

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 있어서

극형식 ; $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 단, $\cos\theta=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\theta=b/\sqrt{a^2+b^2}$

절대값 ; $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

편각의 크기 ; $\theta=\text{amp}(z)$ 또는 $\theta=\arg(z)$

Advice **복소수의 극형식**

복소평면 위에서 0 아닌 복소수

$$z=a+bi \ (a,\ b\text{는 실수}) \quad \cdots\cdots ①$$

를 나타내는 점을 P, 원점을 O라 하고,

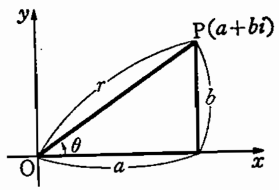
$\overline{\text{OP}}=r$, $\angle x\text{OP}=\theta$

라 하면

$a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$

이므로 이것을 ①에 대입하면

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \cdots\cdots ②$$



가 된다. 이와 같이 복소수 ①을 ②의 꼴로 나타낸 것을 복소수 ①의 **극형식**이라 한다. 이 때 r은 $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$로서 복소수 z의 절대값을 나타낸다. 그리고, ②에서 θ를 복소수 z의 **편각의 크기**라 하고,

$$\theta=\text{amp}(z) \text{ 또는 } \theta=\arg(z)$$

로 나타낸다.

여기에서 θ는 일반각이므로 그 값은 단 하나로 확정되지는 않으나, 그들의 차는 2π의 정수배이다. 그래서, $0\leqq\theta<2\pi$ 또는 $-\pi<\theta\leqq\pi$의 범위에서 알맞는 것을 고르는 것이 보통이다.

또, 복소수 0의 절대값은 0이지만, 그의 편각의 크기는 임의의 각으로 보는 것이 보통이다.

Note amp(z), arg(z)는 amplitude(영어), argument(독어)에서 따온 것이다.

보기 1. 다음 복소수를 극형식으로 나타내어라.
단, 편각 θ는 $-\pi<\theta\leqq\pi$에서 구하여라.

(1) $1+i$ (2) $1+\sqrt{3}i$ (3) $\sqrt{3}-i$ (4) i (5) 2

연구 먼저, 주어진 복소수를 복소평면 위에 도시해 보는 것이 좋다.

定石 복소수 $a+bi$를 극형식으로 나타내려면
첫째——절대값, $r=\sqrt{a^2+b^2}$을 구한다.
둘째——편각의 크기 θ를 구한다.
셋째——극형식 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$에 대입한다.

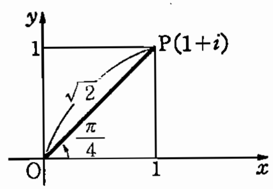
(1) 점 $1+i$를 도시하면 오른편과 같다.

$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

또, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

이므로

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



(2) $|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ 또, $\tan\theta=\sqrt{3}$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore\ 1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

(3) $|\sqrt{3}-i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ 또, $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore\ \sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

(4) $|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$ 또, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\ i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

(5) $|2|=2$ 또, $\theta=0$ $\therefore\ 2=2(\cos0+i\sin0)$

Note 답을 확인하고자 할 때에는 다시 우변을 계산한 것이 좌변과 같은가를 비교해 보는 것도 좋다.

보기 2. 절대값 r과 편각 θ가 다음과 같은 복소수를 $a+bi$의 꼴로 나타내어라.

(1) $r=2$, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ (2) $r=\sqrt{2}$, $\theta=-120°$

연구 (1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$

(2) $\sqrt{2}\{\cos(-120°)+i\sin(-120°)\}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

필수 예제 12-1. 다음 복소수를 극형식으로 나타내어라.

(1) $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $z=\sin\frac{\pi}{13}+i\cos\frac{\pi}{13}$

정석연구 극형식이라 하면

$$r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \text{단, } r>0$$

의 꼴을 말하는 것으로서 ( ) 안에서 실수부가 $\cos\theta$, 허수부가 $\sin\theta$ 이고, $r>0$ 인 것에 주의해야 한다.

(1)은 $r<0$ 의 꼴이므로 극형식이 아니고, (2)는 실수부가 $\sin\theta$, 허수부가 $\cos\theta$ 의 꼴로 되어 있으므로 극형식이 아니다.

수학 I 에서 공부한 다음 공식을 이용해 보도록 하여라.

定石 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\quad \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

모범답안 (1) $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\left\{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ ← 답

(2) $z=\sin\frac{\pi}{13}+i\cos\frac{\pi}{13}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{13}\right)$

$=\cos\frac{11}{26}\pi+i\sin\frac{11}{26}\pi$ ← 답

Advice (1)은 주어진 각이 특수각이므로

$$z=-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

와 같이 $a+bi$ 의 꼴로 고친 다음, 극형식으로 고쳐도 된다. 곧,

$$|z|=\sqrt{2+2}=2,\quad \mathrm{amp}(z)=\frac{5}{4}\pi \quad \therefore\ z=2\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

유 제 12-1. 다음 복소수를 극형식으로 나타내어라.

(1) $z=-\sin\theta+i\cos\theta$ (2) $z=\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

답 (1) $z=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ (2) $z=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

필수 예제 12-2. $z_1=\cos2\theta+i\sin2\theta$, $z_2=\cos\theta+i\sin\theta$ 일 때 다음 복소수의 절대값과 편각의 크기를 각각 구하여라.

(1) z_1+z_2 (단, $-\pi<\theta<\pi$) (2) z_1-z_2 (단, $0<\theta<2\pi$)

정석연구 먼저 z_1+z_2, z_1-z_2 를 $a+bi$ 의 꼴로 고친 다음, 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식을 써서 각각 극형식으로 나타낸다.

定石 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\,(r>0) \Longrightarrow |z|=r,\ \mathrm{amp}(z)=\theta$

모범답안 (1) $z_1+z_2=(\cos2\theta+i\sin2\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(\cos2\theta+\cos\theta)+i(\sin2\theta+\sin\theta)$ ⇦ 아래 *Note*

$=2\cos\frac{3\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{3\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2}\right)$

그런데, $-\pi<\theta<\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $2\cos\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore\ |z_1+z_2|=2\cos\frac{\theta}{2},\quad \mathrm{amp}(z_1+z_2)=\frac{3\theta}{2}$ ← 답

(2) $z_1-z_2=(\cos2\theta+i\sin2\theta)-(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(\cos2\theta-\cos\theta)+i(\sin2\theta-\sin\theta)$ ⇦ 아래 *Note*

$=-2\sin\frac{3\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}+2i\cos\frac{3\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3\theta}{2}+i\cos\frac{3\theta}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}\right)\right\}$

그런데, $0<\theta<2\pi$ 에서 $0<\frac{\theta}{2}<\pi$ $\quad\therefore\ 2\sin\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore\ |z_1-z_2|=2\sin\frac{\theta}{2},\quad \mathrm{amp}(z_1-z_2)=\frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}$ ← 답

Note 위에서 다음 공식이 이용되었다.

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\quad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\quad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

유 제 12-2. $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ 일 때 $z=\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}$ 의 절대값과 편각의 크기를 각각 구하여라.

단, $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ 이다. 답 $|z|=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\mathrm{amp}(z)=\frac{\alpha+\beta}{2}$

§ 2. 복소수의 곱셈과 나눗셈

기 본 정 석

1 복소수의 곱셈과 나눗셈

극형식으로 나타내어진 두 복소수

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

에 대하여 다음 관계가 성립한다.

(1) 곱 셈 ; $z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{amp}(z_1z_2)=\mathrm{amp}(z_1)+\mathrm{amp}(z_2)$$

(2) 나눗셈 ; $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\quad (z_2\neq0)$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{amp}(z_1)-\mathrm{amp}(z_2),\quad \mathrm{amp}\left(\frac{1}{z_1}\right)=-\mathrm{amp}(z_1)$$

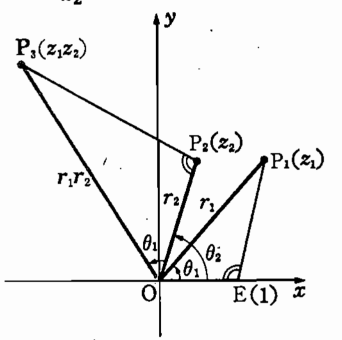
Note (1), (2)의 편각관계에서 양변의 차이가 2π의 정수배가 되는 것은 무시한다.

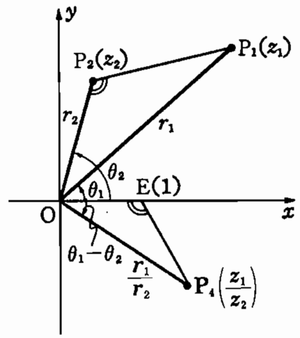
2 복소수의 곱과 몫의 작도

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

를 나타내는 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$가 주어져 있을 때

z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$이 나타내는 점 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$의 작도는 아래 그림과 같다.





Advice 1° **복소수의 곱셈과 나눗셈**

복소수의 곱셈과 나눗셈의 정의는 이미 수학 I에서 배웠으나, 여기서는 그 의미를 더욱 분명하게 하기 위하여 복소평면 위에서 생각해 보기로 한다.

▶ **복소수의 곱셈** ; $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

라 할 때 z_1과 z_2와의 곱을 생각하면

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

이므로 z_1z_2의 절대값은 r_1r_2, 편각은 $\theta_1+\theta_2$임을 알 수 있다. 곧,

'두 복소수의 곱의 절대값은 각 복소수의 절대값의 곱과 같고, 그 편각은 각 복소수의 편각의 합과 같다.'

定石 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{amp}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\mathrm{amp}(z_1)+\mathrm{amp}(z_2)$

▶ **복소수의 나눗셈** ; $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

라 할 때 z_1을 z_2로 나누는 나눗셈을 생각하면

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\\&=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{z_1}{z_2}$의 절대값은 $\dfrac{r_1}{r_2}$, 편각은 $\theta_1-\theta_2$임을 알 수 있다. 곧,

'두 복소수의 몫의 절대값은 각 복소수의 절대값의 몫과 같고, 그 편각은 분자의 편각에서 분모의 편각을 뺀 것과 같다.'

定石 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{amp}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\mathrm{amp}(z_1)-\mathrm{amp}(z_2)$

보기 1. $z_1=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$일 때

z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$을 $a+bi$의 꼴로 나타내어라.

연구 (i) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=6\cdot2=12$,

$$\mathrm{amp}(z_1z_2)=\mathrm{amp}(z_1)+\mathrm{amp}(z_2)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ z_1z_2=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=12\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6+6\sqrt{3}i$$

(ii) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{6}{2}=3$, $\mathrm{amp}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{amp}(z_1)-\mathrm{amp}(z_2)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

또, 이와 같이 절대값, 편각을 따로 구하여 풀어도 되지만,

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\div(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

을 공식으로 기억해 두고서 활용하는 것도 좋다. 곧,

$$z_1z_2=6\cdot2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=12\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right\}=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=6+6\sqrt{3}i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\div\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=3\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

보기 2. $z_1=1-i$, $z_2=-1+\sqrt{3}i$ 일 때, 다음 복소수의 절대값과 편각을 구하고, 극형식으로 나타내어라.

(1) $z_1\cdot z_2$ (2) z_2^2 (3) $\dfrac{z_1}{z_2}$

연구 $z_1=1-i$ 에서 $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\text{amp}(z_1)=-\dfrac{\pi}{4}$

$z_2=-1+\sqrt{3}i$ 에서 $|z_2|=\sqrt{1+3}=2$, $\text{amp}(z_2)=\dfrac{2}{3}\pi$

(1) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{2}\cdot2=2\sqrt{2}$

$$\text{amp}(z_1\cdot z_2)=\text{amp}(z_1)+\text{amp}(z_2)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{12}\pi$$
$$\therefore\ z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

(2) $|z_2^2|=|z_2\cdot z_2|=|z_2|\cdot|z_2|=2\cdot2=4$

$$\text{amp}(z_2^2)=\text{amp}(z_2\cdot z_2)=\text{amp}(z_2)+\text{amp}(z_2)=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$
$$\therefore\ z_2^2=4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

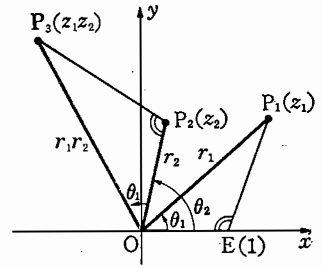
$$\text{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\text{amp}(z_1)-\text{amp}(z_2)=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{11}{12}\pi$$
$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right\}$$

Advice 2° 복소수의 곱과 몫의 작도

두 복소수의 합과 차는 평행사변형의 법칙을 써서 위치관계를 알아본 바 있다. 이에 대하여 두 복소수의 곱과 몫은 도형의 닮음을 이용하여 그 위치관계를 알아 볼 수 있다. 곧, 복소평면 위에 z_1, z_2를 나타내는 점 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$가 주어졌을 때 z_1z_2를 나타내는 점 $P_3(z_1z_2)$, $\dfrac{z_1}{z_2}$을 나타내는 점 $P_4\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$를 작도하는 방법은 다음과 같다.

▶ 곱 $P_3(z_1z_2)$를 작도하는 방법

실축 위의 1을 나타내는 점을 E라 한다. OP_2를 한 변으로 하고, $\triangle OEP_1$과 같은 방향으로 닮은 $\triangle OP_2P_3$를 그리면 점 P_3가 곱 z_1z_2를 나타내는 점이다. 왜냐하면,



$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ 이므로

$|z_1z_2|:|z_2|=|z_1|:1$

$\therefore\ OP_3:OP_2=OP_1:OE$ ………①

$\text{amp}(z_1z_2)=\text{amp}(z_1)+\text{amp}(z_2)$ 이므로

$\angle EOP_3=\angle EOP_1+\angle EOP_2$

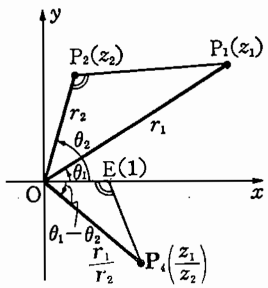
$\therefore\ \angle P_2OP_3=\angle EOP_1$ …………②

①, ② 로부터 $\triangle OP_2P_3\backsim\triangle OEP_1$

따라서, z_1에 z_2를 곱한 것은 복소평면 위에서 OP_1을 r_2배 하면서 O를 중심으로 θ_2만큼 회전한 것이다. 이와 같은 회전을 **닮음회전**이라고도 한다.

▶ 몫 $P_4\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$를 작도하는 방법

실축 위의 1을 나타내는 점을 E라 한다. OE를 한 변으로 하고, $\triangle OP_2P_1$과 같은 방향으로 닮은 $\triangle OEP_4$를 그리면 점 P_4가 몫 $\dfrac{z_1}{z_2}$을 나타내는 점이다. 왜냐하면,



$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ 이므로, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|:1=|z_1|:|z_2|$

$\therefore\ OP_4:OE=OP_1:OP_2$ …………①

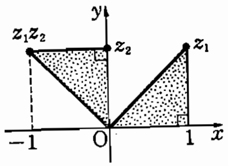
$\text{amp}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\text{amp}(z_1)-\text{amp}(z_2)$ 이므로,

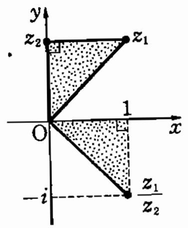
$\angle EOP_4=\angle EOP_1-\angle EOP_2$

$\therefore\ \angle EOP_4=\angle P_2OP_1$ …………②

①, ② 로부터 $\triangle OEP_4\backsim\triangle OP_2P_1$

보기 3. $z_1=1+i,\ z_2=i$ 일 때 $z_1z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ 을 작도에 의해서 구하고, 계산 결과와 비교하여라.





연구 오른편 작도에 의하여

$$z_1z_2=-1+i,\quad \frac{z_1}{z_2}=1-i$$

한편, 계산에 의하여

$$z_1z_2=(1+i)i$$
$$=i+i^2=-1+i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{i+i^2}{-1}=1-i$$

필수 예제 12-3. $\alpha=2+5i,\ \beta=3+4i,\ \gamma=5+8i$ 일 때 $z=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ 를 극형식으로 나타내어라.
단, 편각 θ 는 $0\leqq\theta<2\pi$ 의 범위로 나타내어라.

정석연구 $\beta-\alpha,\ \gamma-\alpha$ 를

극형식 ; $r(\cos\theta+i\sin\theta),\ r>0$

의 꼴로 나타낸 다음,

定石 $$\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

을 이용한다.

또, z 를 $a+bi$ 의 꼴로 정리한 다음, 이것을 극형식으로 나타내는 방법도 생각할 수 있다.

모범답안 $$z=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{(3+4i)-(2+5i)}{(5+8i)-(2+5i)}=\frac{1-i}{3(1+i)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{3}\left\{\cos\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)\longleftarrow \boxed{\text{답}}$$

유제 12-3. 다음 복소수를 극형식으로 나타내어라.

(1) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (2) $\dfrac{2(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}-i}$ (3) $\dfrac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+3i}$

답 (1) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ (2) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (3) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

필수 예제 12-4. 다음과 같은 두 복소수가 있다.

$$z_1=2-\sqrt{3}a+ai,\quad z_2=\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i$$

z_1 과 z_2 의 절대값이 같고, $\dfrac{z_2}{z_1}$ 의 편각이 $\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, 실수 $a,\ b$ 의 값을 구하여라.

정석연구 문제의 조건으로부터 $|z_1|=|z_2|$ 이므로

$$\frac{|z_2|}{|z_1|}=1 \quad \therefore \left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1$$

이다. 한편, $\dfrac{z_2}{z_1}$ 의 편각이 $\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 를

극형식 ; $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 단, $r>0$

로 나타내어 이를 정리하면

$$\frac{z_2}{z_1}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i \qquad \therefore z_2=z_1i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

결국, 이 문제는 z_1 과 z_2 사이에 ① 과 같은 관계가 있을 때 실수 $a,\ b$ 의 값을 구하라는 것이다.

따라서 $z_1,\ z_2$ 를 ① 에 대입한 다음, 수학 Ⅰ에서 공부한

정의 $a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수일 때

$$a+bi=c+di \iff a=c,\ \ b=d$$

를 활용하면 해결된다.

모범답안 문제의 조건으로부터 $|z_1|=|z_2|$ 이므로

$$\frac{|z_2|}{|z_1|}=1 \ \text{ 곧, } \left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1 \text{ 이고, } \operatorname{amp}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \frac{z_2}{z_1}=i \qquad \therefore z_2=z_1i$$

여기에 $z_1=2-\sqrt{3}a+ai,\ z_2=\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i$ 를 대입하면

$$\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i=(2-\sqrt{3}a+ai)i$$

곧, $\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i=-a+(2-\sqrt{3}a)i$

$a,\ b$ 는 실수이므로

$$\sqrt{3}b-1=-a \ \cdots\cdots\cdots ① \qquad \sqrt{3}-b=2-\sqrt{3}a \ \cdots\cdots\cdots ②$$

①, ② 를 연립하여 풀면 $a=b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\longleftarrow \boxed{\text{답}}$

유제 12-4. $z=a+bi$ 가 있다. 복소수 $\dfrac{z-1}{z}$ 의 절대값이 $\sqrt{2}$ 이고, 편각이 $\dfrac{\pi}{4}$ 일 때 실수 $a,\ b$ 의 값을 구하여라. 답 $a=0,\ b=1$

필수 예제 12-5. $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ 가 있다. 다음에 답하여라.

(1) z 를 $a+bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(2) $1+\sqrt{3}i$, $1+i$ 를 극형식으로 고쳐서 z 를 극형식으로 나타내어라.

(3) 위 (1), (2)의 실수부분과 허수부분을 비교함으로써 $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ 의 값을 구하여라.

정석연구 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ 의 값을

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

과 같이 구하는 방법을 공부한 바 있다.

이 예제의 경우는 또 하나의 방법으로서

복소수 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ 를 이용하여 $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ 의 값

을 구하는 요령을 보인 것이다.

모범답안 (1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ←답

(2) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ 이므로

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \longleftarrow \text{답}$$

(3) 위의 결과로부터 $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}+\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)i=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$$\therefore\ \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\qquad \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

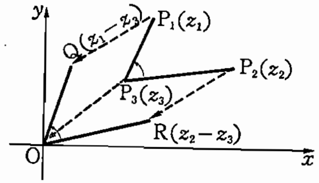
$$\therefore\ \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\qquad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \longleftarrow \text{답}$$

유 제 12-5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)(\sqrt{3}+i)$를 이용하여 $\cos\dfrac{5}{12}\pi$, $\sin\dfrac{5}{12}\pi$ 의 값을 각각 구하여라.

답 $\cos\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

필수 예제 12-6. 복소평면 위에 세 점 P(-1), Q(1), R(z)가 있다. 복소수 $\dfrac{(-1+i)(z-1)}{z+1}$ 이 음의 실수일 때 $\angle$PRQ 의 크기를 구하여라.

정석연구 먼저, 복소평면 위의 세 점 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_3(z_3)$에 대하여 $\angle P_2P_3P_1$ 의 크기를 알아 보자.



오른편 그림에서와 같이 $Q(z_1-z_3)$, $R(z_2-z_3)$인 두 점을 잡으면 사변형 OQP_1P_3, 사변형 ORP_2P_3 는 모두 평행사변형이 되므로 $\angle P_2P_3P_1$ 은

$$\angle P_2P_3P_1=\angle ROQ$$

$$=\operatorname{amp}(z_1-z_3)-\operatorname{amp}(z_2-z_3)=\operatorname{amp}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$$

이다. 곧,

定石 $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_3(z_3)$이라 할 때

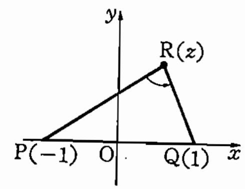
$$\angle P_2P_3P_1=\operatorname{amp}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$$

이 공식은 오른편 요령에 따라 기억해 두는 것이 좋다. 이 요령에 따르면

$\angle P_2P_3P_1$
분모 분자

$$\angle P_1P_2P_3=\operatorname{amp}\left(\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\right),\quad \angle P_3P_2P_1=\operatorname{amp}\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)$$

모범답안 $\angle PRQ=\operatorname{amp}\left(\dfrac{1-z}{-1-z}\right)=\operatorname{amp}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$



한편, $\dfrac{(-1+i)(z-1)}{z+1}$ 이 음의 실수이므로 이 복소수의 편각은 π이다.

$$\therefore\ \operatorname{amp}\left(\frac{(-1+i)(z-1)}{z+1}\right)=\pi$$

$$\therefore\ \operatorname{amp}(-1+i)+\operatorname{amp}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\pi \quad \therefore\ \frac{3}{4}\pi+\operatorname{amp}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\pi$$

$$\therefore\ \operatorname{amp}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{4} \longleftarrow \text{답}$$

유 제 12-6. 복소평면 위에서 $z_1=-1+3i$, $z_2=(\sqrt{3}-1)+2i$, $z_3=-1+i$ 를 나타내는 점을 각각 P_1, P_2, P_3 라 할 때 $\angle P_2P_3P_1$ 의 크기를 구하여라.

답 $\dfrac{\pi}{3}$

필수 예제 12-7. 복소평면에서 복소수 z_1, z_2, z_3을 나타내는 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 한다. z_1, z_2, z_3이

$$z_2-z_1=(1+\sqrt{3}i)(z_3-z_1)$$

을 만족할 때 $\angle P_1, \angle P_2, \angle P_3$을 구하여라.

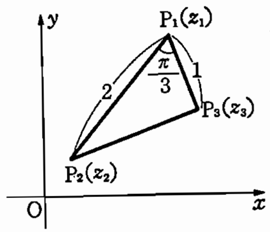
모범답안 $z_2-z_1=(1+\sqrt{3}i)(z_3-z_1)$에서

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\text{amp}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\frac{\pi}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



① 에서 $|z_2-z_1|=2|z_3-z_1|$

$\therefore\ \overline{P_2P_1}=2\overline{P_3P_1} \qquad \therefore\ \overline{P_2P_1} : \overline{P_3P_1}=2 : 1$

② 에서 $\angle P_3P_1P_2=\dfrac{\pi}{3}$

따라서, $\angle P_1=\dfrac{\pi}{3},\ \angle P_2=\dfrac{\pi}{6},\ \angle P_3=\dfrac{\pi}{2}$ ← 답

Advice 이와 같은 유형의 문제는

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

의 꼴로 변형하고, 좌변의 절대값과 편각을 조사한다. 이 때,

$$\text{amp}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=\angle P_3P_1P_2$$

인 것에 착안하여 ③의 좌변과 같이 분자, 분모의 빼는 수가 같은 복소수(z_1)가 되도록 조건식을 변형해야 한다.

유제 12-7. 복소평면 위에서 세 점 z_1, z_2, z_3 사이에 다음 관계가 성립할 때 점 z_1, z_2, z_3을 꼭지점으로 하는 삼각형의 꼴은 무엇인가?

(1) $\dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (2) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{\sqrt{3}i-1}{\sqrt{3}i+1}$

(3) $z_1-z_2=i\sqrt{3}(z_3-z_2)$ (4) $z_1+iz_2=(1+i)z_3$

Hint (4) $z_1+iz_2=z_3+iz_3$에서 $z_1-z_3=-i(z_2-z_3)$

답 (1) 정삼각형 (2) 정삼각형 (3) 점 z_2가 직각인 직각삼각형 (4) 점 z_3이 직각인 직각 이등변삼각형

필수 예제 12-8. 복소평면 위에서 복소수 z를 나타내는 점 P가 원점을 중심으로 하고 반지름 1인 원주 위를 움직일 때, 다음 복소수 w를 나타내는 점 Q는 어떤 도형 위를 움직이는가?

(1) $w=iz-i$ (2) $w=\dfrac{z-2i}{z-2}$

정석연구 p. 198의 필수예제 11-6과 같이

$$z=x+yi, \qquad w=u+vi$$

로 놓고, 주어진 조건을 써서 u와 v 사이의 관계식을 구하여 해결해도 되지만 여기에서는

준 식을 z에 관하여 푼 다음, $|z|=1$을 이용

해 보도록 하자.

여기에서 이용되는 것은 복소수의 절대값에 관한 다음 성질이다.

定石 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

모범답안 (1) $w=iz-i$에서 $iz=w+i \quad \therefore\ z=-i(w+i)$

그런데, 문제의 조건으로부터 $|z|=1$이므로

$|-i(w+i)|=1 \quad \therefore\ |-i|\cdot|w+i|=1 \quad \therefore\ |w+i|=1$

$\therefore$ **점 $-i$를 중심, 반지름 1인 원** ← 답

(2) $w=\dfrac{z-2i}{z-2}$를 z에 관해서 풀면 $z=\dfrac{2(w-i)}{w-1}$

그런데, 문제의 조건으로부터 $|z|=1$이므로

$\left|\dfrac{2(w-i)}{w-1}\right|=1 \quad \therefore\ \dfrac{|w-i|}{|w-1|}=\dfrac{1}{2}$ 곧, $|w-1| : |w-i|=2 : 1$

그러므로, w를 나타내는 점 Q는 두 점 1, i에서의 거리의 비가 $2:1$되게 움직이는 점이다.

$\therefore$ **점 $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}i$를 중심, 반지름 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$인 원** ← 답

유제 12-8. 복소평면 위에서 점 z가 원점을 중심, 반지름 1인 원 위를 움직일 때, 다음 조건을 만족하는 점 w가 그리는 도형은 무엇인가?

(1) $w=z+i+1$ (2) $w=z^2$ (3) $w=\dfrac{z+1}{z}$

답 (1) 점 $1+i$를 중심, 반지름 1인 원 (2) 원점을 중심, 반지름 1인 원 (3) 점 1을 중심, 반지름 1인 원

필수 예제 12-9. 복소평면 위에서 다음 점을 나타내는 복소수를 각각 구하여라.

(1) 점 $2+i$를 원점을 중심으로 $45°$ 만큼 회전한 점

(2) 점 $2+i$를 점 $-3+2i$를 중심으로 $90°$ 만큼 회전한 점

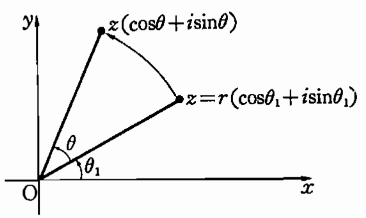
정석연구 복소평면 위에서 점 z의 회전에 관한 공식은 다음과 같다.

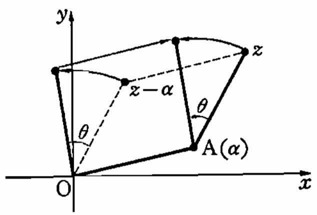
定石 (i) 점 z를 원점을 중심으로 θ만큼 회전한 점은

$\Longrightarrow z(\cos\theta+i\sin\theta)$

(ii) 점 z를 점 α를 중심으로 θ만큼 회전한 점은

$\Longrightarrow (z-\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)+\alpha$





(i) $z=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$이라 하면 ⇦ 위의 왼편 그림에서

$z(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=r\{\cos(\theta_1+\theta)+i\sin(\theta_1+\theta)\}$

여기에서 z와 $z(\cos\theta+i\sin\theta)$를 비교하면 절대값 r은 변하지 않고, $z(\cos\theta+i\sin\theta)$의 편각 $\theta_1+\theta$는 z의 편각 θ_1에 θ를 더한 것임을 알 수 있다.

(ii) 위의 오른편 그림에서 점 $z-\alpha$를 원점을 중심으로 θ만큼 회전한 것을 OA의 방향으로 OA의 크기만큼 평행이동한 점이 곧 점 z를 점 α를 중심으로 θ만큼 회전이동한 것임을 알 수 있다.

모범답안 (1) $(2+i)(\cos45°+i\sin45°)=(2+i)\left(\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt2}i\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{3}{\sqrt2}i$$

(2) $\{(2+i)-(-3+2i)\}(\cos90°+i\sin90°)+(-3+2i)=\mathbf{-2+7i}$

유 제 12-9. 복소평면 위에서 점 z를 점 α를 중심으로 $90°$, $-90°$, $-60°$ 만큼 회전한 점을 각각 구하여라.

답 $iz+(1-i)\alpha,\ \ -iz+(1+i)\alpha,\ \ \frac{1}{2}(1-\sqrt3 i)z+\frac{1}{2}(1+\sqrt3 i)\alpha$

§ 3. 드 므와브르의 정리

기 본 정 석

1 드 므와브르의 정리

n이 정수일 때

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

2 이항방정식 $z^n=A$ 의 해법

$A=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(a>0)$라 하면 $z^n=A$ 의 해는

$$z=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ \text{단, } k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

Advice 1° 드 므와브르의 정리

절대값이 1인 n개의 복소수

$\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\ \cos\theta_2+i\sin\theta_2,\ \cdots,\ \cos\theta_n+i\sin\theta_n$

이 있을 때

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

를 써서 이들을 순차적으로 곱해 보기로 하자.

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

여기에 다시 $\cos\theta_3+i\sin\theta_3$를 곱하면

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$

$=\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

같은 방법으로 계속하면

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\times\cdots\times(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$

이 되는 것은 분명하다. 여기에서

$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$

로 놓으면

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

를 얻는다. 이것을 **드 므와브르(De Moivre)의 정리**라 한다.

이 정리는 n이 0 또는 음의 정수일 때도 성립한다. 곧, 임의의 정수에 대하여 성립한다.

먼저, 이 정리의 일반적인 증명부터 해 보기로 하자.

▶ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ (n은 정수)의 증명

(1) n이 양의 정수인 경우 ⇦ 수학적 귀납법의 이용

(i) $n=1$일 때

좌변$=\cos\theta+i\sin\theta$, 우변$=\cos\theta+i\sin\theta$

이므로 준 식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 준 식이 성립한다고 가정하면

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

이므로

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 준 식은 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

(2) $n=0$인 경우

$\sin\theta$, $\cos\theta$가 동시에는 0이 될 수 없으므로 $\cos\theta+i\sin\theta\neq0$이다.

그러므로, $n=0$일 때 준 식에서 좌변$=1$, 우변$=1$이므로 준 식은 성립한다.

(3) n이 음의 정수인 경우

$n=-m$ (m은 양의 정수)으로 놓으면

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^n&=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}=\left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m\\&=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^m \quad \Leftarrow \text{위의 (1)을 이용}\\&=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)\\&=\cos n\theta+i\sin n\theta\end{aligned}$$

(1), (2), (3)에 의해 준 식은 모든 정수에 대하여 성립한다.

Note 드 므와브르의 정리에서 밑이 극형식이라는 점에 주의해야 한다.

이를테면 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n$은 밑이 극형식이 아니므로

$$(\sin\theta+i\cos\theta)^n\neq\sin n\theta+i\cos n\theta$$

다만, $(\cos\theta-i\sin\theta)^n$은 밑이 극형식의 꼴이 아니지만,

$$\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

과 같이 극형식으로 고쳐서 계산하면

$$(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^n=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

곧, $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$

가 성립한다.

보기 1. 다음 각 값을 구하여라.

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$ (2) $(\cos10^\circ+i\sin10^\circ)^{12}$

(3) $(\cos10^\circ-i\sin10^\circ)^6$ (4) $\{\sqrt{2}(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)\}^{-6}$

(5) $(1+i)^{10}$ (6) $(\sqrt{3}-i)^6$

(7) $(1+\sqrt{3}i)^{-10}$ (8) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

연구 밑이 극형식이 아닌 것은 극형식으로 고친다.

정석 n이 정수일 때 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$를 이용

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=\cos6\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin6\cdot\frac{\pi}{3}=\cos2\pi+i\sin2\pi=\mathbf{1}$

(2) $(\cos10^\circ+i\sin10^\circ)^{12}=\cos120^\circ+i\sin120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3) $$\begin{aligned}(\cos10^\circ-i\sin10^\circ)^6&=\{\cos(-10^\circ)+i\sin(-10^\circ)\}^6\\&=\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)=\cos60^\circ-i\sin60^\circ=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\{\sqrt{2}(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)\}^{-6}&=(\sqrt{2})^{-6}\{\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)\}\\&=-\frac{1}{8}i\end{aligned}$$

(5) $(1+i)^{10}=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{10}{4}\pi+i\sin\frac{10}{4}\pi\right)=\mathbf{32i}$

(6) $$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^6&=\left[2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]^6\\&=2^6\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}=-\mathbf{64}\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^{-10}&=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-10}\\&=2^{-10}\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}\\&=\frac{1}{2^{10}}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2^{11}}(1-\sqrt{3}i)\end{aligned}$$

(8) $$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}&=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{12}\\&=\frac{1}{64}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{64}\end{aligned}$$

Advice 2° 이항방정식 $z^n=A$ 의 해법

▶ $z^3=1$ 의 해법

이항하여 인수분해하면

$$z^3=1 \text{ 에서 } z^3-1=0 \qquad \therefore (z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore z-1=0 \text{ or } z^2+z+1=0 \qquad \therefore z=1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

가 된다.

그러나, 이와 같은 인수분해에 의한 해법은 인수분해가 가능할 때이고, 일반적으로는 위의 방법만으로는 해결할 수 없는 경우가 있다.

그래서, 드 므와브르의 정리에 의한 해법을 생각해 보기로 하자.

보기 2. 이항방정식 $z^3=1$ 을 풀어라.

연구 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ 로 놓으면

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

한편, 1을 극형식으로 고치면(이 때, 편각은 일반각으로 표시한다)

$$1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi \text{ (단, } k \text{ 는 정수)} \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

①, ② 에서 $r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$

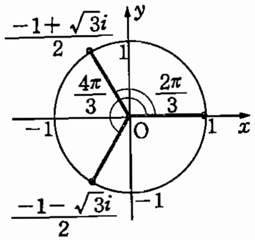
$$\therefore r^3=1,\ 3\theta=2k\pi \quad \therefore r=1\ (\because r>0),\ \theta=\frac{2k\pi}{3}$$

따라서, $z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ (단, k 는 정수)

여기에서 $k=0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면

$$z=1,\ \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

곧, $z=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$



Note 이 세 값을 나타내는 점은 오른편 그림과 같이 단위원을 3등분하는 점이다.

k 에 $k=0,\ 1,\ 2$ 이외의 어떤 값을 대입해도 이들 3개 이외의 값은 나오지 않는다.

▶ $z^n=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(a>0)$ 의 해법

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$로 놓으면 드 므와브르의 정리에 의해서

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\therefore r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$\therefore r^n=a,\ n\theta=\alpha+2k\pi \qquad \therefore r=\sqrt[n]{a},\ \theta=\frac{\alpha+2k\pi}{n}$$

$$\therefore z=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \text{ (단, } k \text{ 는 정수)}$$

k 에 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 을 대입하면 서로 다른 n개의 z 의 값이 얻어진다.

그런데, $k=n$ 이라 하면 편각은 $\theta=\dfrac{\alpha+2n\pi}{n}=\dfrac{\alpha}{n}+2\pi$ 이므로 $k=0$ 일 때와 같은 값이 된다.

임의의 정수 m 에 대하여,

m 을 n 으로 나눈 몫을 p, 나머지를 q $(0\leq q\leq n-1)$ 라 하면

$$m=pn+q \text{ 이므로 } k=m \text{ 일 때 } \theta=\frac{\alpha+2m\pi}{n}=\frac{\alpha+2q\pi}{n}+2p\pi$$

그러므로, $k=m$ 일 때와 $k=q$ 일 때의 z 는 같은 값이 된다.

따라서, 서로 다른 z 의 값은 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 일 때의 n개 뿐이다. 일반적으로

定石 $z^n=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(a>0)$ 의 해는

$$z=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \text{ 단, } k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

보기 3. 다음 이항방정식을 풀어라.

(1) $z^3=i$ (2) $z^4=-1$

연구 (1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$ 로 놓으면 드 므와브르의 정리로부터

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

한편, $i=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ (단, k 는 정수) ⋯⋯②

①, ② 에서 $r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore r^3=1,\ 3\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore r=1\ (\because r>0),\ \theta=\frac{4k+1}{6}\pi$$

$$\therefore z=\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi$$

$k=0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -i$

Note $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ 이므로 위의 공식(정석)에서 $a=1,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ n=3$ 인 경우이다. 이 값들을 공식에 대입하면 같은 결과를 얻을 수 있다.

(2)를 위의 공식을 써서 답을 구하면 다음과 같다.

(2) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ 이므로 $a=1,\ \alpha=\pi,\ n=4$ 인 경우이다.

$$\therefore z=1\cdot\left(\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi\right) \text{ 단, } k=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 을 대입하면

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

필수 예제 12-10. 12제곱하여 1이 되는 복소수의 집합을 A, 3제곱하여 1이 되는 복소수의 집합을 B, 4제곱하여 1이 되는 복소수의 집합을 C라 할 때, 다음 각 물음에 답하여라.

(1) $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$는 집합 A의 원임을 보여라.

(2) 집합 C의 원을 모두 써라.

(3) $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$가 집합 B의 원임을 보이고, 또한 $\dfrac{\alpha}{\omega}$는 집합 C의 원임을 보여라.

(4) 집합 A의 원은 모두 집합 B의 원과 집합 C의 원의 곱으로 나타내어짐을 보여라.

정석연구 집합 A, B, C는 다음과 같다.

$$A=\{x\,|\,x^{12}=1\},\qquad B=\{x\,|\,x^3=1\},\qquad C=\{x\,|\,x^4=1\}$$

모범답안 (1) $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore\ \alpha^{12}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12}=\cos\left(12\times\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(12\times\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=1\qquad\therefore\ \alpha\in A$$

(2) $x^4=1$로 놓으면 $(x^2-1)(x^2+1)=0$ $\quad\therefore\ x^2=1$ or $x^2=-1$

$\therefore\ x=\pm1,\ \pm i\qquad\therefore\ C=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ ←— 답

(3) $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$$\omega^3=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^3=\cos\left(3\times\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(3\times\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=1\qquad\therefore\ \omega\in B$$

또, $\dfrac{\alpha}{\omega}=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i\qquad\therefore\ \frac{\alpha}{\omega}\in C$$

(4) A의 임의의 원을 x라 하면 $x^{12}=1$ $\quad\therefore\ x=x^{13}=x^4\cdot x^9$

$(x^4)^3=x^{12}=1$로부터 $x^4\in B$, $\quad(x^9)^4=(x^{12})^3=1$로부터 $x^9\in C$

따라서, A의 원은 B의 원과 C의 원과의 곱으로 나타내어진다.

유제 12-10. 위의 문제에서 다음 사실을 보여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\in A$ $\qquad$ (2) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\in B$ $\qquad$ (3) $i\in C$

필수 예제 12-11. $z=\dfrac{(1+i)^3}{\sqrt{2}(a+i)^2}\ (a>0)$에서 $|z|=\dfrac{1}{2}$일 때

(1) a의 값을 구하여라.

(2) z^n이 실수가 되는 양의 정수 n의 최소의 자연수 및 그 때의 z^n을 구하여라.

정석연구 (1) $|z|=\left|\dfrac{(1+i)^3}{\sqrt{2}(a+i)^2}\right|=\dfrac{|(1+i)^3|}{\sqrt{2}\,|(a+i)^2|}=\dfrac{|1+i|^3}{\sqrt{2}\,|a+i|^2}$

(2) z^n이 실수가 되는 것은 z^n의 허수부가 0일 때이므로 z^n의 허수부를 구하여 0으로 놓아라.

定石 z^n의 허수부가 0 $\Longleftrightarrow$ z^n은 실수

모범답안 (1) $|z|$를 a의 식으로 나타내면

$$|z|=\left|\frac{(1+i)^3}{\sqrt{2}(a+i)^2}\right|=\frac{|1+i|^3}{\sqrt{2}\,|a+i|^2}=\frac{(\sqrt{1+1})^3}{\sqrt{2}(\sqrt{a^2+1})^2}=\frac{2}{a^2+1}$$

한편, 문제의 조건에서 $|z|=1/2$이므로

$\dfrac{2}{a^2+1}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ a^2+1=4,\ a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$ ←— 답

(2) $a=\sqrt{3}$을 대입하여 z를 극형식으로 나타내면

$$z=\frac{(1+i)^3}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^3}{\sqrt{2}\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2}=\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\therefore\ z^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{5n\pi}{12}+i\sin\frac{5n\pi}{12}\right)$$

이것이 실수로 되기 위해서는 허수부분이 0이어야 하므로

$$\sin\frac{5n\pi}{12}=0\qquad\therefore\ \frac{5n\pi}{12}=k\pi\ \ (\text{단, } k\text{는 정수})$$

이와 같은 n의 최소의 자연수는 $n=12$이고, 이 때,

$$z^n=z^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}(\cos5\pi+i\sin5\pi)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

답 $n=12,\ z^{12}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

유제 12-11. n이 10 미만의 자연수일 때 $\alpha^n=(-1+\sqrt{3}i)^n$의 값이 실수가 되게 하는 n의 값과 그 때의 α^n의 값을 구하여라.

답 $n=3,\ 6,\ 9,\ \alpha^3=8,\ \alpha^6=64,\ \alpha^9=512$

필수 예제 12-12. 다음 방정식을 풀어라.

(1) $z^6=i$ (2) $z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$

모범답안 (1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0)$ 로 놓으면

$$z^6=r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta) \quad \cdots\cdots①$$

한편, $i=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ (k 는 정수) $\cdots\cdots②$

①, ② 에서 $r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ r^6=1,\ 6\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ r=1\ (\because\ r>0),\ \theta=\frac{4k+1}{12}\pi$

$$\therefore\ z=\cos\frac{4k+1}{12}\pi+i\sin\frac{4k+1}{12}\pi$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 를 대입하면

$z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i,\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ← 답

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0)$ 로 놓으면

$$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta) \quad \cdots\cdots①$$

한편, $8(-1+\sqrt{3}i)=16\left\{\cos\left(2k\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$ $\cdots\cdots②$

①, ② 에서 $r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=16\left\{\cos\left(2k\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$\therefore\ r^4=16,\ 4\theta=2k\pi+\frac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore\ r=2\ (\because\ r>0),\ \theta=\frac{3k+1}{6}\pi$

$$\therefore\ z=2\left(\cos\frac{3k+1}{6}\pi+i\sin\frac{3k+1}{6}\pi\right)$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 을 대입하면

$z=\sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}i$ ← 답

유 제 12-12. 다음 방정식을 풀어라.

(1) $z^6=1$ (2) $z^2=1+\sqrt{3}i$ (3) $z^3=2+2i$ (4) $z^5=1$

답 (1) $\pm1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2) $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,\ -1+i,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

(4) $1,\ \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}i),\ -\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}i)$

연습문제 12

기본 **12-1.** $z+\frac{4}{z}=2$ 일 때 $\frac{1}{z}$ 을 극형식으로 나타내어라.

12-2. $z=-4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$일 때 다음 복소수의 극형식을 구하여라.

(1) $\overline{z}$ (2) $-\overline{z}$ (3) $\frac{1}{2}z$

12-3. 이차방정식 $x^2+px+q=0$ ($p,\ q$ 는 실수)가 두 허근을 가지고, 그 한 근의 절대값이 2, 편각이 30° 일 때 $p,\ q$ 의 값을 구하여라.

12-4. $\theta=5°$ 일 때 $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)(\cos3\theta+i\sin3\theta)}{\cos\theta-i\sin\theta}$ 의 값을 구하여라.

12-5. 삼각형 ABC 에서 $\frac{(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)}{\cos C+i\sin C}$ 가 실수일 때 삼각형 ABC 는 어떤 모양인가?

12-6. 두 복소수 $2+i,\ 3+i$ 의 최소의 양의 편각을 각각 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 임을 증명하여라.

12-7. 두 개의 복소수 $z_1=1+2i,\ z_2=4+3i$ 에 대하여 $\cos\{\mathrm{amp}(z_2)-\mathrm{amp}(z_1)\}$의 값을 구하여라.

12-8. 복소수 $z(z\neq0)$를 나타내는 점을 P라고 할 때 다음 복소수는 어떤 점을 나타내는가?

(1) iz (2) $(\sqrt{3}+i)z$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{1+i}z$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}-i}z$

12-9. 복소평면 위에 서로 다른 네 점 $P_1(z_1),\ P_2(z_2),\ P_3(z_3),\ P_4(z_4)$가 있다. 직선 P_1P_2 와 P_3P_4 가 다음 경우, $\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}$ 은 어떤 복소수인가?

(1) $P_1P_2 /\!/ P_3P_4$ (2) $P_1P_2 \perp P_3P_4$

12-10. $z=1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i$ 일 때 z^4 의 절대값과 편각을 구하여라.

12-11. 다음 각 값을 구하여라.

(1) $\{2(\cos10°+i\sin10°)\}^{12}$ (2) $(1-i)^{-7}$ (3) $(1+i)^4(\sqrt{3}-i)^3$

(4) $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{12}-\left(\frac{1-i}{2}\right)^{12}$ (5) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}\right)^6$ (6) $\frac{(3+\sqrt{3}i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^3}$

12-12. $\alpha=\cos60°+i\sin60°$ 일 때 다음 값을 구하여라.

(1) $z=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{29}$ (2) $z=1+\alpha+\alpha^4+\alpha^9+\alpha^{16}+\alpha^{25}$

12-13. $\dfrac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^5(\cos\theta-i\sin\theta)^3}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^7(\cos2\theta-i\sin2\theta)^5}$ 을 간단히 하여라.

12-14. n 이 양의 정수일 때 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$ (2) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$

12-15. $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$ 를 써서 다음 공식을 증명하여라.

$$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,\qquad \cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

12-16. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^p=1$ 을 만족하는 최소의 자연수 p 의 값을 구하여라.

12-17. $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$ 을 만족하는 양의 정수 m, n 에 대하여 m, n 이 각각 최소가 될 때의 m 과 n 의 값을 구하여라.

실력 **12-18.** $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $z_2=\sin\theta+i\cos\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 일 때 $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-z_1z_2}\right|$ 의 값을 구하여라.

12-19. α, β 는 $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ 을 만족하는 0 아닌 복소수라 한다.

(1) $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ 를 구하여라. (2) $\mathrm{amp}(\alpha)-\mathrm{amp}(\beta)$ 를 구하여라.

(3) 복소평면 위에서 α, β 를 나타내는 점을 각각 A, B라 하고 원점을 O라 할 때 삼각형 OAB는 어떤 모양인가?

12-20. 복소평면 위의 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C가 복소수 z, z^2, z^3 으로 정해져 있을 때

(1) AB=AC이면 A는 어떤 도형 위에 있는가?

(2) 이 때, ∠A가 직각이 되는 점 A를 나타내는 복소수를 구하여라.

12-21. 복소평면 위에서, 점 z 를 원점 O를 중심으로 90° 만큼 회전시킨 후, 실축의 양의 방향으로 1, 다시 허수축의 양의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 z^* 라 한다.

(1) z^* 를 z 의 식으로 나타내어라.

(2) $z^*=z$ 가 되게 하는 z 를 z_0 라 한다. z_0 를 구하여라.

(3) z^* 는 z 를 z_0 를 중심으로 90° 만큼 회전시켜서 얻었다는 것을 식을 써서 나타내어라.

12-22. 복소평면 위의 점 z 를 이 평면 위의 점 $w=i(z+1)+2$ 로 옮기는 이동을 생각한다. 이 이동에서 움직이지 않는 한 점 P가 있다.

(1) 이와 같은 점 P를 구하여라.

(2) 이 이동은 점 P를 중심으로 하는 회전이동임을 증명하여라.

12-23. 복소평면 위의 두 점 A(1), B(3)에 대하여 점 P(z)를 A를 중심으로 60°, B를 중심으로 −60° 만큼 회전한 점을 각각 P_1, P_2 라 한다. P_1, P_2 의 중점을 M이라 할 때 $\overline{PM}=1$ 을 만족하는 점 P(z)의 자취를 구하여라.

12-24. $A=\{z\,|\,|z|\leq1,\ z$ 는 복소수$\}$, $z\in A$ 일 때 $(z+2i)^2$ 의 절대값 r 과 편각 θ 의 범위를 구하여라. 단, $0\leq\theta<2\pi$ 이다.

12-25. 복소평면 위에서 세 점 z_1, z_2, z_3 이 일직선 위에 있을 필요충분조건은 $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ 이 실수인 것임을 증명하여라.

12-26. 네 점 A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)가 이 순서로 동일 원주 위에 있기 위한 필요충분조건은 $\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\div\dfrac{z_4-z_2}{z_3-z_2}$ 가 양의 실수인 것임을 증명하여라.

12-27. 복소수 z 에 대하여 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ 라 한다.

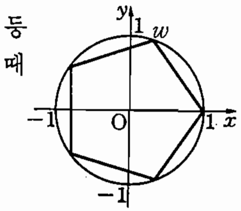
(1) θ 가 변할 때, 복소평면 위에서 점 z 의 자취를 구하여라.

(2) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ 임을 증명하여라. 단, n 은 정수이다.

12-28. 복소평면 위의 단위원을 그림과 같이 5등분한 점 중 제1사분면에 놓인 점을 w 라 할 때 다음 각 값을 구하여라.

(1) $w^4+w^3+w^2+w+1$

(2) $w+\dfrac{1}{w}$



12-29. $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 일 때 $z+z^2+z^3$ 이 실수가 되는 θ 의 값을 구하여라. 단, $0\leq\theta<2\pi$ 이다.

12-30. 절대값이 1이고, 편각이 α 인 복소수 z 에 대해서 $w=1-z$ 라 한다. 단, $0<\alpha<2\pi$ 이다.

(1) w 를 극형식으로 나타내어라.

(2) $w^2-4z\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+4i=0$ 이 되게 하는 α 의 값을 구하여라.

12-31. 다음 조건을 만족하는 복소수 $x+yi$ 를 구하여라.

$$(x+yi)^{24}=1,\quad x>0,\ y>0$$

12-32. x 의 방정식 $ix^2-2(3i-1)x+7i=6-\sqrt{3}$ 을 풀어라.

12-33. $|z|=1$, $z^5+z=1$ 을 만족하는 복소수 z 를 구하여라.

9-7. $A=30°$, $B=90°$, $C=60°$

9-8. $\cos\theta=\dfrac{a+c}{2b}$

9-9. (1) $C=90°$ 인 직각삼각형
(2) $A=90°$ 인 직각삼각형

9-10. $y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}x$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{7}x$

9-11. 순서대로(그래프는 생략)
(1) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $360°$
(2) 2, -2, $360°$

9-12. $k=4$, $l=-4$

9-13. (1) 최대값 ; $\dfrac{1}{5}$, 최소값 ; $\dfrac{1}{15}$
(2) 최대값 ; $\dfrac{5}{4}$,
최소값 ; $-\sqrt{2}-1$
(3) 최대값 ; $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$,
최소값 ; -1

9-14. $a=3$

9-15. $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{5}$
or $a=-\sqrt{15}$, $b=-\sqrt{5}$

9-16. 최대값 ; 15, 최소값 ; 5

9-17. 최대값 ; $5l$

9-18. (1) $A\leqq B$(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립) (2) 최대값 ; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

9-19. $\dfrac{8}{11}$

9-20. $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$
or $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

9-21. $\dfrac{3}{4}$

9-22. 최대값 ; $\sqrt{151}$, 주기 ; 10

9-23. (1) $0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{5}{4}$

9-24. $0°\leqq\theta<45°$

10-1. 생략 **10-2.** n

10-3. (1) 1 (2) $\dfrac{5}{8}$

10-4. 순서대로 $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, 4

10-5. (1) 최대값 ; $\dfrac{5}{2}$,
최소값 ; -2 (2) 최대값 ; 4,
최소값 ; $1-2\sqrt{2}$

10-6. (1) $0\leqq\cos x\leqq1$
(2) 최소값 ; -1, 최대값 ; 0

10-7. $\overline{AD}=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\theta}{2}$

10-8. 생략

10-9. (1) $\sin2\alpha=-\dfrac{24}{25}$,
$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
(2) $\tan2\alpha=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$,
$\tan\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(3) $\tan20°=\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$

10-10. $a=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$,
$b=-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

10-11. 생략

10-12. (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{16}$

10-13. $\sin2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=30°$ or $60°$

10-14. (1) $x=\dfrac{n}{2}\pi-\dfrac{\pi}{12}$
(단, n은 정수)
(2) $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$(단, n은 정수)
(3) $\theta=15°$, $45°$, $75°$
(4) $x=\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{3}{8}\pi$, $\dfrac{5}{8}\pi$, $\dfrac{7}{8}\pi$
(5) $x=0$, π, $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{5}{8}\pi$

10-15. $\alpha=-15°$, $\beta=-30°$

10-16. (1) $\cos2\alpha=1-x+y$,
$\cos2\beta=x+y-1$
(2) $0\leqq x-y\leqq2$, $0\leqq x+y\leqq2$
(도시는 생략)

10-17. (1) 7 : 5 : 3 (2) 7 : 5 : 3
(3) -49 : 55 : 39 (4) -143:65:33

10-18. (1) $A=90°$ 또는 $C=90°$ 인 직각삼각형
(2) $a=b$ 인 이등변삼각형
(3) $b=c$ 인 이등변삼각형 또는 $A=90°$인 직각삼각형

10-19. $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형

10-20. 4, 5, 6

10-21. $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-2$

10-22. 생략 **10-23.** $-\dfrac{7}{13}$

10-24. $A<B$

10-25. $\cos(x-y)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$,
$\cos(x+y)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

10-26. 생략 **10-27.** $\dfrac{1}{3}$

10-28. (1) $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,
$x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)
(2) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{11}{12}\pi$

10-29. $a<-2$, $a>\dfrac{1}{4}$일 때 0개,
$a=-2$일 때 1개,
$-2<a<0$, $a=\dfrac{1}{4}$일 때 2개,
$0\leqq a<\dfrac{1}{4}$일 때 4개

10-30. $\theta=n\pi$, $x=1$

10-31. $a=\dfrac{3}{4}$

10-32. (1) $p=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$
(2) $\alpha=30°$, $60°$, $150°$

10-33. $A=60°$, $B=90°$, $C=30°$

11-1. (1) $\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i$ (2) $-11-21i$
(3) $\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{3}i$ (도시는 생략)

11-2. 1

11-3. $4-2i$, $5+i$, $1-i$

11-4. $\dfrac{5}{2}$ **11-5.** $z=2+4i$

11-6. 생략 **11-7.** -1

11-8. 생략

11-9. (1) $(2\pm3\sqrt{3})i$ (2) $1\pm\sqrt{3}$

11-10. z는 원점을 중심, 반지름 1인 원주 위를 움직인다. 단, 점 $(\pm1, 0)$은 제외한다.

11-11. (1) 원점을 중심, 반지름 1 인 원
(2) 직선 $x=\frac{1}{2}$
(3) 점 2를 중심, 반지름 2인 원

11-12. (1) 점 i를 중심, 반지름 1 인 원
(2) 점 α를 중심, 반지름 r인 원

11-13. 생략　**11-14.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11-15. $|1-\overline{\alpha}\beta|>|\alpha-\beta|$

11-16. $(a, b)=(1, 0),\ (1, 1),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (-1, 0),\ (-1, -1)$

11-17. $z=-\frac{\alpha}{\overline{\alpha}},\quad x=\frac{\alpha\overline{\alpha}}{\alpha+\overline{\alpha}}$

11-18. $\sqrt{2+2\sqrt{5}}$

11-19. $a=0,\ b=3,\ r=2,\ k=2$

11-20. $w=u+vi$라 하면
(i) z가 OA 위일 때
$v=0,\ -1\leqq u\leqq 0$
(ii) z가 AB 위일 때
$v=0,\ -2\leqq u\leqq -1$
(iii) z가 BO 위일 때
$v=\frac{1}{2}(u+1)^2-\frac{1}{2}$,
$-2\leqq u\leqq 0$(도시는 생략)

11-21. (1) $\pi+4$　(2) π

11-22. w는 중심이 점 $-\frac{2}{3}i$, 반지름이 $\frac{1}{3}$인 원주 및 그 내부

11-23. $(|z|-1)(|z-1|-1)\times(|z|-|z-1|)\geqq 0$

12-1. $\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ (복호동순)

12-2. (1) $4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$
(2) $4\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$
(3) $2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

12-3. $p=-2\sqrt{3},\ q=4$

12-4. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

12-5. $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

12-6. 생략　**12-7.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

12-8. (1) P를 원점을 중심으로 90° 회전한 점
(2) P를 원점을 중심으로 30° 회전한 점을 P′라 할 때 OP′를 OP′의 방향으로 2배한 2OP′의 점
(3) P를 원점을 중심으로 −45° 회전한 점
(4) P를 원점을 중심으로 30° 회전한 점

12-9. (1) 0 아닌 실수　(2) 순허수

12-10. 절대값 ; 64, 편각 ; $\frac{5}{3}\pi$

12-11. (1) $2^{11}(-1+\sqrt{3}i)$
(2) $\frac{1}{16}(1-i)$　(3) $32i$　(4) 0
(5) 1　(6) 216

12-12. (1) 0　(2) 0

12-13. $\cos 13\theta-i\sin 13\theta$

12-14. (1) $\cos n\theta+i\sin n\theta$
(2) $2\cos\frac{2n\pi}{3}$

12-15. 생략　**12-16.** $p=4$

12-17. $m=6,\ n=12$

12-18. 1

12-19. (1) 2　(2) $\pm\frac{\pi}{3}$
(3) $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{OBA}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

12-20. (1) 점 -1을 중심, 반지름 1인 원(단, 원점 제외)
(2) $-1+i,\ -1-i$

12-21. (1) $iz+1+i$　(2) $z_0=i$
(3) $z^*=(z-z_0)(\cos 90°+i\sin 90°)+z_0$

12-22. (1) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$　(2) 생략

12-23. 점 $\mathrm{C}(2+\sqrt{3}i)$를 중심, 반지름 2인 원

12-24. $1\leqq r\leqq 9,\ \frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{4}{3}\pi$

12-25. 생략　**12-26.** 생략

12-27. (1) 원점을 중심, 반지름 1인 원　(2) 생략

12-28. (1) 0　(2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

12-29. $\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

12-30. (1) $w=2\sin\frac{\alpha}{2}\times\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$
(2) $\alpha=\frac{\pi}{2}$

12-31. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,$
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i,$
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

12-32. $x=\frac{6\pm\sqrt{6}}{2}+\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}i$ (복호동순)

12-33. $z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

13-1.～13-6. 생략

13-7. QO=3(cm)　**13-8.** 생략

13-9. A′B′를 AA′ : BB′의 비로 내분, 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원이다. 특히, AA′=BB′일 때의 자취는 선분 A′B′의 수직이등분선이다.

13-10. 정점 H를 중심, 반지름 $\sqrt{l^2-h^2}$인 원

13-11. $10-4\sqrt{3}$(cm)

13-12. 생략

13-13. 8π

13-14. $\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$

13-15. 60° 또는 120°

13-16. 생략

13-17. (1) $\sqrt{2}a$　(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

13-18. $\frac{\sqrt{6}}{6}a$　**13-19.** $\frac{4}{3}$

13-20. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$