3. 여러 가지 수열

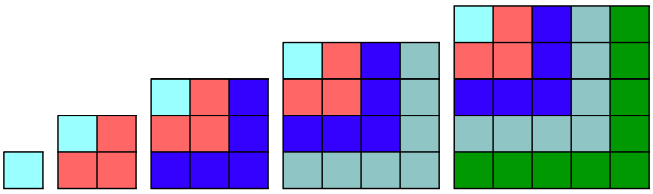
[단원의 이론적 배경]

(1) 도형과 수열의 합

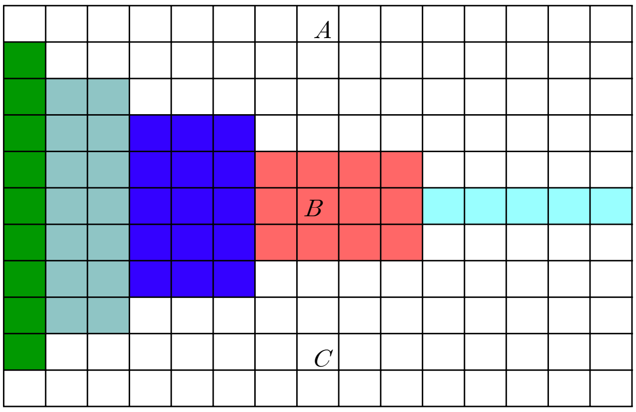
피타고라스는 도형을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구하는 방법을 탐구하였다. 이보다 앞서 고대 바빌로니아의 문헌에는 1부터 10까지의 제곱의 합을 구하는 공식이 나타나 있다. 여기서는 그들의 지혜를 이해하고 그러한 공식을 일반화하도록 한다.

아래와 같은 도형의 배열에 대하여 다음을 알아보자.

(가)



(나)



(가)에는 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ 개의 정사각형이 있음을 알 수 있다.
(나)에는 $3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$개의 정사각형이 있음을 알 수 있다.
왜냐하면, (나)의 A와 C의 정사각형의 개수는 각각 (가)와 같다.
이제, (나)의 B의 정사각형의 개수는 (가)와 같음을 확인하면 된다.

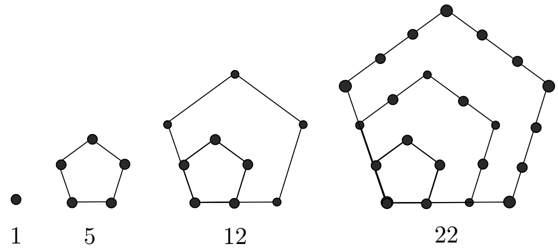
확인을 할 수 있도록 색깔로 구분을 해 놓았다.

따라서

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=(1+2+3+4+5)(1+9+1)=\frac{5\times6\times11}{2}$$

(2) 오각수

다음과 같은 수를 오각수라고 한다.



이 오각수의 일반항 a_n을 구하여 보자.

오각수들의 계차수열 b_n은 다음과 같다.

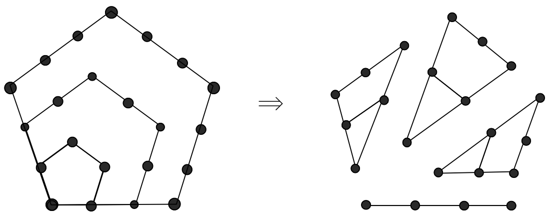
$$4,\ 7,\ 10,\ \cdots$$

그러므로 $b_n = 3n+1$인 등차수열이다.

따라서 오각수의 일반항 a_n은 다음과 같다.

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

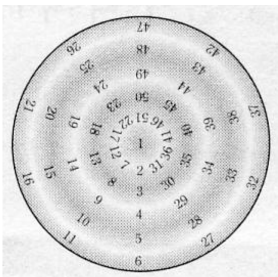
다음 그림에서 n번째 오각수는 $(n-1)$번째 삼각수의 3배와 n의 합임을 알 수 있다.



즉, $a_n = 3\dfrac{n(n-1)}{2} + n$

(3) 원판에 배열된 수열

오른쪽 그림과 같은 원에서 5개의 지름 위에 있는 수들의 합은 모두 같다. 1부터 51까지의 자연수는 1을 제외하면 50개의 수이므로 다음과 같이 10개씩 5개의 무리로 나눌 수 있다.



2, 3, 4, 5, 6, 47,48,49,50,51 : 합은 53×5
7, 8, 9,10,11, 42,43,44,45,46 : 합은 53×5
12,13,14,15,16, 37,38,39,40,41 : 합은 53×5
17,18,19,20,21, 32,33,34,35,36 : 합은 53×5
22,23,24,25,26, 27,28,29,30,31 : 합은 53×5

이를 이용하여 1부터 51까지의 자연수의 합을 구하면 다음과 같다.

$$1+(2+3+4+\cdots+51) = 1+(53\times5)\times5 = 1326$$

등차수열의 합의 공식을 이용하여 위에서 얻은 결과가 옳은지 확인할 수 있다.

(4) 정사각형 수열

다음 수표는 어떤 규칙성에 의해 만들어졌다. 수표에 있는 수들을 적절히 배열하여 규칙성을 찾아보자.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

$1+2+2+4,\ 4+6+6+9,\ 9+12+12+16,\ \cdots$ 의 규칙성은 무엇인가?

$$a_1=9,\ a_2=25,\ a_3=49,\ \cdots$$

$$\therefore\ a_n=(2n+1)^2$$

(5) 학습목표

① 여러 가지 수열의 규칙을 발견하고, 그 합을 구할 수 있도록 한다.
② Σ의 기호를 이해하고, 이를 활용할 수 있는 능력을 가르도록 한다.
③ 합의 기본 공식을 이해하고, 이를 활용할 수 있도록 한다.
④ 간단한 계차수열의 일반항을 구할 수 있도록 한다.

1. $\sum$기호의 약속과 그 성질

(1) $\sum$ 기호의 약속

앞의 단원에서 배운 등차, 등비수열에서 그 수열의 합을 나타낼 때, S_n으로 나타내는 것을 배웠지요?

하지만 이렇게 나타내는 것은 한계가 있습니다. 왜냐하면 일률적으로 그 합을 한 식으로 표현하기가 힘들기 때문이지요.

이를테면

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{10}$으로 나타내지만

$a_5+a_6+\cdots+a_{10}$는 $S_{10}-S_4$으로

$a_3+a_4+a_5+a_9+a_{10}$는 $S_5-S_2+S_{10}-S_8$과 같이 표현하기가 어려운 점이 많습니다......-_-;;

이와 같이 수열의 합을 간단히 나타내는데 기호 $\sum$(sigma)를 씁니다.

이것은 영어의 Sum(합)에 해당되는 그리스말의 머리글자입니다.

이를테면

자연수 제곱의 합 : $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

을 나타내어 봅시다.

이 수열은 k^2이라는 k번째의 항에 k의 대신에 $k=1, 2, 3, \cdots, 10$을 차례로 대입하여 더한 것이지요?

이것을 $\sum$의 기호를 써서 다음과 같이 나타내기로 약속합니다.

첫째로 이 수열의 k번째의 항을 k의 식으로 나타냅니다. 즉, k^2

둘째로 k^2의 앞에 $\sum$ 기호를 씁니다. 즉, $\sum k^2$

셋째로 k^2에 $k=1$을 대입하면 첫째항 1^2이 되고

k^2에 $k=10$을 대입하면 끝항인 10^2이 되지요?.

마지막으로 $\sum$의 아래에 $k=1$을, 위에 10을 적어서 $\sum_{k=1}^{10} k^2$으로 나타냅니다. 즉, $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10} k^2$

으로 나타낼 수가 있는 것입니다.

수열의 합은 일반적으로 다음과 같이 정의합니다.

◆ $\sum$ 기호의 약속 ◆

끝항의 번호

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

k번째 항

첫째항의 번호

이 기호는 처음은 생소하게 느껴질지 모릅니다. 하지만 조금만 눈 여겨서 기호의 약속을 따라 천천히 해보면 조금 후에는 익숙해 질 것이니 여러 가지 예를 통하여 익히도록 합시다..........*^^*

$\sum_{k=1}^{n} a_k$는 a_k의 k에 1부터 n까지 대입한 값입니다.

다시 말하면 수열 a_k의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 의미합니다.

즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

1항부터의 합이 아니어도 간단히 나타낼 수가 있습니다.

이를테면 $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_n=\sum_{k=5}^{n} a_k$ 로 쓸 수 있는 것입니다.

☀ 참고 1]

$\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 k는 하나의 형식적인 변수에 불과합니다.

따라서 k가 아닌 다른 문자로 바꾸어도 상관이 없습니다. 즉

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{n} a_j=\cdots$$

는 다 같은 표현이 되는 것이라는 말이지요.

이를테면

$$x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots+x_{10}f_{10}=\sum_{i=1}^{10}x_if_i$$

같이 써도 됩니다.

하지만 이 단원의 수열에서는 주로 k인 문자를 쓰고 특별히 구분하고자 할 때에는 다른 문자를 쓰게 됩니다.
통계에서는 주로 i를 많이 쓰고는 합니다........

☀ 참고 2]
위에 적혀있는 수는 <u>항의 개수를 말하는 것이 아닙니다.</u>
이를테면

$\sum_{k=1}^{n}a_k$는 1항부터 n항까지 즉, n개의 항의 합을 나타내지만

$\sum_{k=2}^{n}a_k$는 2항부터 n항까지 즉, $n-1$개의 항의 합을 말하는 것입니다.

$\sum_{k=m}^{n}a_k=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$ ⬅ 항의 개수 : $n-m+1$개

☀ 참고 3]

$\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 변수는 k가 됩니다.
즉, k의 값이 변한다는 것이지요. 따라서 a_k에서 k가 아닌 문자는 변수로 취급을 하는 것이 아니라 상수로 취급해야 하는 것입니다.
이를테면

$$\sum_{k=1}^{n}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

이 아니라

$$\sum_{k=1}^{n}a_n=a_n+a_n+a_n+\cdots+a_n$$

을 의미하는 것입니다.

예를 들면 $\sum_{k=1}^{n}n=n+n+n+\cdots+n$ (n개)입니다.

문제 1) $1+4+7+10+\cdots+43$을 $\sum$를 이용하여 나타내면?

① $\sum_{k=1}^{15}(3k-2)$　② $\sum_{k=1}^{14}(3k-2)$　③ $\sum_{k=1}^{15}(3k+1)$

④ $\sum_{k=1}^{14}(3k+1)$　⑤ $\sum_{k=1}^{14}(3k+1)$

[풀이]

문제 2) $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n$ 은 $0, 1, 2$ 중 어느 하나의 값을 갖는다. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 13, \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 23$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3$ 의 값은?

[풀이]

(2) $\sum$ 기호의 성질

$\sum$ 기호가 가지는 기본성질을 공부하여 봅시다.

이를테면 다음과 같은 $\sum$ 가 포함된 식의 변형을 생각해 봅시다.

㉠ $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = (1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)$

$$= (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

㉡ $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\times1+2\times2+2\times3+\cdots+2\times n = 2(1+2+3+\cdots+n)$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k$$

㉢ $\sum_{k=1}^{n} 3 = 3+3+3+\cdots+3\ \ (n\text{개}) = 3n$

위의 예들을 일반화하면 다음의 성질이 있음을 알 수가 있습니다.

◆ $\sum$ 기호의 기본성질 ◆

[1] $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (단, 복호동순)

[2] $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 k와 무관한 상수)

[3] $\sum_{k=1}^{n} c = c+c+c+\cdots+c = nc$

[증명]

[1] $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

[2] $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

여기서 주의해야할 것은 c와 k가 서로 무관하면 c는 **상수 취급**을 해야 한다는 것입니다. 비록 c에 다른 변수가 포함되어 있는 경우에도 k와 무관한 변수라면 항상 상수 취급을 해야 하는 것입니다.

[3] $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc$

여기서 주의해야 할 것은 n과 c를 무작정 곱하는 경우가 많은데 이런 실수를 해서는 안 됩니다. n은 무엇보다 항의 개수를 말하는 것이므로 **c에 곱할 때는 항의 수를 곱하여야 합니다**. 예들 들면

$$\sum_{k=0}^{n} c = c + c + c + \cdots + c \ (n+1\text{개}) = (n+1)c$$

아시겠습니까?.........실수하면 자기를 때려!!!~~~~
자~~문제를 통하여 그 성질을 이해하도록 합시다.

문제 3) $\sum_{k=1}^{10} a_k = 4,\ \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 8$일 때 $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + 2)^2$의 값은?

[풀이]

문제 4) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n$일 때, $\sum_{k=1}^{12} a_k$의 값은?

① 22　② 23　③ 77　④ 78　⑤ 92

[풀이]

문제 5) 수열 $\{a_n\}$이 $a_n = 2a_{3n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}-a_{3k})$와 같은 것을 고르면?

① $\sum_{k=1}^{n}a_k$ ② $\sum_{k=1}^{2n}a_k$ ③ $\sum_{k=1}^{n}a_{n+2k}$ ④ $\sum_{k=1}^{2n}a_{n+k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{3n}a_{n+k}$

[풀이]

문제 6) $\sum_{k=1}^{100}(2k-10) = \sum_{k=1}^{99}(2k-10)+\square$ 가 성립할 때, $\square$ 에 알맞은 수를 구하면?

[풀이]

참고 4] $\sum$의 평행이동

이것은 첫째항부터의 합이 아닌 임의의 중간항부터의 합을 첫째항부터의 합으로 나타내는 방법을 말합니다. 잉? 무슨 소리? 이를테면

$\sum_{k=3}^{10}k^2$는 3항부터 10항 까지의 합이 아닙니까?

이를 계산하려면 10항까지의 합에서 2항까지의 합을 빼서 구하면 되겠지만 하나의 기호로 나타내지를 못하지요...즉,

$$\sum_{k=3}^{10}k^2 = \sum_{k=1}^{10}k^2 - \sum_{k=1}^{2}k^2$$

처럼 두 개의 기호로 나타낸다는 것이지요. 하지만 이것을 하나의 기호로 나타내면서 1항부터의 합으로 표현한다면 좀 더 간편할 수가 있다는 뜻입니다. 이를테면

$$\sum_{k=3}^{10} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 10^2$$

이므로 이것은 일반항이 $(k+2)^2$인 수열의 1항에서 8항까지의 합이라고 할 수가 있으므로 다음과 같은 관계가 성립합니다.

$$\sum_{k=3}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{8} (k+2)^2$$

이해가 됩니까? 이를 일반적으로 나타내면

$$\sum_{k=i}^{n} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_n = a_{1+(i-1)} + a_{2+(i-1)} + \cdots + a_{n-i+1+(i-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-i+1} a_{k+i-1}$$

이를 $\sum$의 평행이동이라 합니다.

이를 이용하면 첫째항부터의 합이 아닌 임의의 중간항부터의 합도 첫째항부터의 합의 형태로 나타낼 수 있어 계산을 간편하게 할 수 있습니다. 이해가 잘 되지 않으면 굳이 평행이동의 방법을 쓰지 않아도 구할 수가 있으니 필요한 사람만 기억하고 활용하기 바랍니다.....*^^*

☀ **참고 5]** 기호 $\sum$를 써서 합을 나타낼 때, 여러 가지 방법이 있음을 알 수 있다.

① $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

② $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$

문제 7) $\sum_{k=0}^{n-1} (k^2+1) - \sum_{k=1}^{n} (k^2-1) = -35$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

[풀이]

문제 8) 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이면 $a_n = \boxed{\text{(가)}}$ 임을 증명하는 과정이다.

|증명|

임의의 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이므로

$$
\begin{aligned}
{a_{k+1}}^3 &= \sum_{i=1}^{k+1} {a_i}^3 - \sum_{i=1}^{k} {a_i}^3 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_i\right) \\
&= \boxed{\text{(나)}}\left(\boxed{\text{(나)}} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore {a_{k+1}}^2 = a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ ········· ㉠

즉, ${a_k}^2 = a_k + 2\sum_{i=1}^{k-1} a_i$ ········· ㉡

㉠과 ㉡에서 ${a_{k+1}}^2 - {a_k}^2 = \boxed{\text{(다)}}$. 따라서 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$\therefore a_n = \boxed{\text{(가)}}$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$a_n = 2n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$
②	$a_n = 2n$	a_k	$a_{k+1} - a_k$
③	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} - a_k$
④	$a_n = n$	a_k	$a_{k+1} + a_k$
⑤	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$

[풀이]

2. $\sum$기호와 수열의 합

(1) 자연수 거듭제곱의 합

어떤 수열의 합을 구할 때, 그 수열이 등차수열이거나 등비수열이면 합을 구하는 공식이 있으므로 공식에 대입하면 그 합을 구할 수 있습니다. 그러나 그 이외의 수열에서는 제 n항까지의 합을 구하는 일정한 공식이 없습니다. 흑...T_T

이러한 경우에는 앞에서 공부한 기호 **$\sum$의 성질**과 이 단원에서 배울 **자연수의 거듭제곱의 합에 관한 공식**을 활용하면 그 합을 구할 수가 있는 것입니다.

자연수 거듭제곱의 합에 관한 공식은 다음의 3가지를 기본적으로 기억하고 외워두어야 합니다....반드시!! 꼭!!! 이것 못 외우면 아무것도 할 수 없어~

◆ 자연수 거듭제곱의 합 ◆

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

[2] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = (1+2+\cdots+n)^2$

[증명]

[1] 이 수열은 등차수열의 합입니다.
등차수열의 합의 공식을 적용하면 간단하게 해결됩니다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{\text{항 수}(\text{첫째항}+\text{끝항})}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

[2] 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$에서

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

이들 n개의 식을 변끼리 더하여 정리하면

$$\begin{aligned}(n+1)^3-1^3 &= \sum_{k=1}^{n}3k^2+\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

[3] 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 [2]와 같은 방법으로 증명하면 됩니다.

k에 관한 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$에서

$k=1$일 때, $2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$일 때, $3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$일 때, $4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

$$\vdots$$

$k=n-1$일 때, $n^4-(n-1)^4=4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$

$k=n$일 때, $(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

이들 n개의 식을 변변 더하면

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$

$$(n+1)^4-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$\Leftrightarrow\ (n+1)[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1]=4\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$\Leftrightarrow\ (n+1)(n^3+n^2)=4\sum_{k=1}^{n}k^3\ \Leftrightarrow\ n^2(n+1)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

다음 공식 역시 비슷하게 유도할 수 있습니다. 단지 고교과정에서는 쓰이지는 않으니 그냥 재미로 보세요........^^;

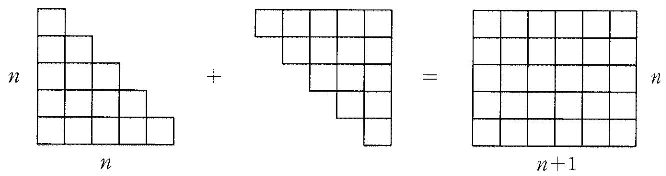
$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

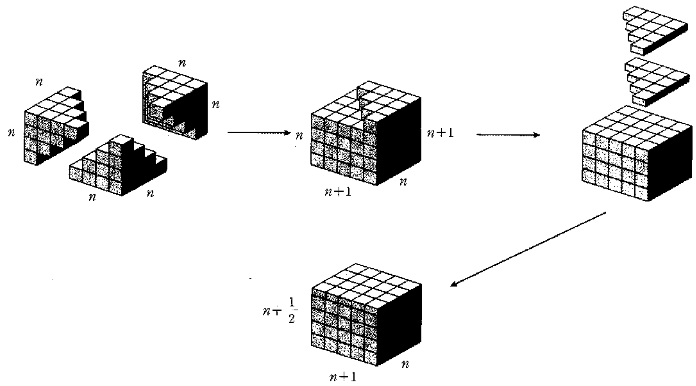
※ 그림을 통한 증명법

[1] 자연수 n의 합



$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)\ \text{따라서,}\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

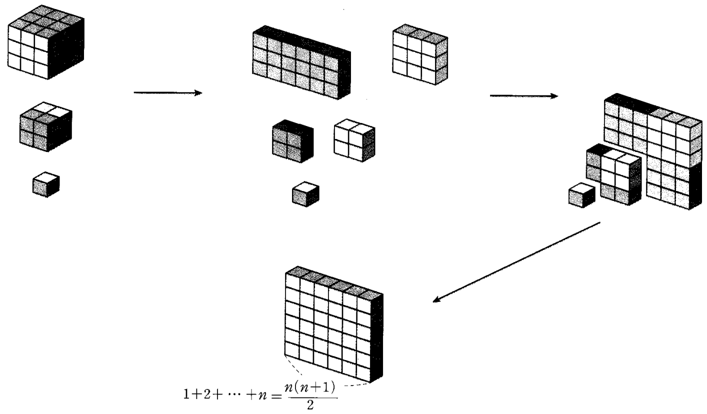
[2] 자연수 n^2의 합



$$\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2=n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1),$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[3] 자연수 n^3의 합



$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

문제 9) $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$ 의 값은?

[풀이]

문제 10) 1부터 10까지의 자연수를 적당히 나열한 것을

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$$

이라 할 때, $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 10 \cdot a_{10}$ 의 최대값은?

① 300 ② 346 ③ 362 ④ 385 ⑤ 400

[풀이]

문제 11) 오른쪽 그림과 같이 규칙적으로 나열된 수들이 있다. 이 수들의 총합은?

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
....
10 10 10 ⋯ 10

① 382 ② 385 ③ 388 ④ 392 ⑤ 396

[풀이]

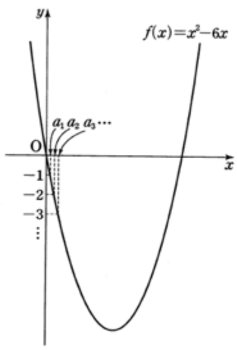
문제 12) 자연수 $1,2,3,\cdots,n$ 중에서 서로 다른 두 수를 뽑아 곱한 합을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{n(n+1)}{12}$ ② $\dfrac{n(n+1)}{24}$ ③ $\dfrac{(n-1)n(n+1)(3n+1)}{12}$

④ $\dfrac{n(n+1)(3n+1)}{24}$ ⑤ $\dfrac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$

[풀이]

문제 13) 이차함수 $f(x)=x^2-6x$의 함수값이 정수가 되는 양수 x의 값을 작은 것부터 큰 것 순으로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$라 할 때, $f(x)=7$을 만족하는 양수 x의 값은?

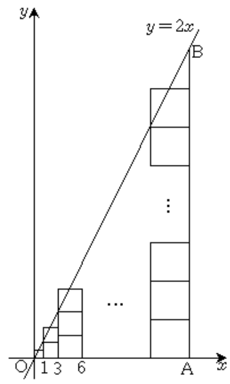


① a_{17} ② a_{20} ③ a_{22}

④ a_{25} ⑤ a_{27}

[풀이]

문제 14) 오른쪽 그림은 직선 $y=2x$와 한 변의 길이가 1인 정사각형 1개, 한 변의 길이가 2인 정사각형 2개, ⋯, 한 변의 길이가 n인 정사각형 n개를 나타낸 것이다. 원점으로부터의 거리가 $1+2+3+\cdots+n$인 x축 위의 점 A를 지나고 y축에 평행인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 B라 하자. 다음은 이를 이용하여 어떤 수열의 합을 구하는 과정이다.



|증명|

모든 정사각형들의 넓이의 합은 직각삼각형 OAB의 넓이와 같으므로

$\boxed{(가)}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=1+2+3+\cdots+n$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\boxed{(나)}$이다.

따라서 $\boxed{(가)}=\boxed{(다)}$이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$	n^2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
②	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
④	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	$n(n+1)$	$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
⑤	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	n^2	$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

[풀이]

참고 6] 연속한 자연수의 곱의 합

연속한 몇 개의 자연수의 곱의 합은 그 규칙성이 존재하고 문제를 풀 때에 많이 응용하는 것이므로 알아보도록 합시다.

[1] $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

[2] $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⬅ 연속한 두 자연수의 곱의 합

[증명] $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

[3] $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

⬅ 연속한 세 자연수의 곱의 합

[증명] $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k$$

$$= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

위의 공식에 규칙성이 보이나요?

분모는 1 만큼씩 증가하고 분자는 그 뒤의 연속하는 수가 하나 더 곱하여지지요?

이 규칙성을 이용하면 연속한 네 자연수의 곱의 합도 추정할 수 있습니다.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

이해가 되지요? 이처럼 이 공식은 연속한 n 개의 자연수의 곱에 대하여도 그 합을 알 수가 있습니다.

(2) 합 ($\sum_{k=1}^{n} a_k$)이 주어질 때, 일반항 구하기

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 는 합에서 배운 S_n 과 같은 의미입니다. 즉,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

따라서, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 값이 주어지면 앞에서 배운 **합과 일반항의 관계**를 이용하여 일반항을 구할 수 있습니다.

◆ S_n 과 a_n 의 관계 ◆

$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2) \qquad a_1 = S_1$

문제 15) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_{3k}$ 의 값을 구하여라.

[풀이]

문제 16) 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2n^2+3n$ 을 만족할 때, $a_3+a_6+a_9+a_{12}+a_{15}$ 의 값을 구하여라.

[풀이]

(3) 두 개 이상의 $\sum$ 의 계산

$\sum$ 의 기호가 여러 개 있다고 해서 당황하거나 어려워하지 마세요....
여러 개가 있을 때는 맨 오른쪽의 기호부터 계산하되 **변수로 쓰인 문자가 무엇인지를 정확히 파악**하고 다른 문자는 상수취급을 한다면 별 어려움이 없을 것입니다... 문제를 통하여 이를 확인해봅시다...

문제 17) $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} k^2 \right)$ 을 n 으로 나타내어라.

[풀이]

문제 18) $m+n=48$, $mn=20$일 때, $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right)$의 값은?

[풀이]

3. 계차수열(progression of difference)

(1) 계차(difference), 계차수열

수열에서 뒤의 항에서 앞의 항을 뺀 차를 계차(difference)라고 합니다. 이를테면 어떤 수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$가

$$1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31, \cdots \qquad \cdots ①$$

일 때, 뒤의 항에서 앞의 항을 빼 보면

$$\begin{array}{cccccc} a_2-a_1, & a_3-a_2, & a_4-a_3, & a_5-a_4, & a_6-a_5, & \cdots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \cdots \end{array} \qquad \cdots ②$$

이 됩니다.
이 때, ②의 각각의 수를 ①번 수열의 계차라고 하고
②의 수열은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열을 이루고 있다는 것을 알 수 있지요?

이와 같이 계차가 어떤 수열을 이룰 때, 이 수열을 ①의 계차수열이라고 하는 것입니다.

즉, 어떤 수열 $\{a_n\}$에 대하여 각 항의 계차로 이루어진 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 합니다.
또 $\{b_n\}$의 계차로 이루어진 수열 $\{c_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 제 2계차수열이라고 하고 이하 계속 계차로 이루어진 수열을 만들어가면 제 $3, 4, \cdots$ 계차수열이라고 합니다.

그림으로 도식화 해볼까요?

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n \quad \cdots$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \qquad b_{n-1} \quad b_n$$ ⬅ 제1계차수열

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \qquad c_{n-1}$$ ⬅ 제2계차수열

사실 ①의 수열은 그 일반항을 금방 알아보기가 힘이 들지만 계차수열은 등차수열이란 사실을 알 수가 있으므로 등차수열인 **계차수열을 이용하여 원래의 수열 ①의 일반항을 구할 수가 있는 것**입니다.

(2) 계차수열을 알 때의 일반항

위의 예를 들어서 ①의 수열의 일반항을 그 계차수열인 ②의 수열을 이용하여 구하여 봅시다.

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 31, \ \cdots \qquad a_n$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad \cdots \qquad b_n$$

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad \cdots$$ ⬅ 제1계차수열

먼저 이 수열의 제 1계차수열인 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로 그 일반항은 $b_n = 2n$임을 알 수 있습니다.

$$a_1 = a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + b_2 = (a_1 + b_1) + b_2$$
$$= a_1 + (b_1 + b_2) = 1 + (2+4) = 7$$
$$a_4 = a_3 + b_3 = (a_1 + b_1 + b_2) + b_3$$
$$= a_1 + (b_1 + b_2 + b_3) = 1 + (2+4+6) = 13$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$
$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$
$$= n^2 - n + 1$$

위와 같이 계차수열을 이용하여 일반항을 구하는 방법을 알아보았습니다.

이를 일반화 시켜서 생각하면 다음과 같이 정리할 수가 있습니다.

계차수열 $\{b_n\}$을 알 때의 원수열 $\{a_n\}$의 일반항은 다음과 같이 구합니다.

◆ 계차수열을 이용한 원수열의 일반항 ◆

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = a_1 +$ (**$\{b_n\}$의 $n-1$항 까지의 합**)

$$= a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) \ \cdots \ ①$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ \cdots \ ②$$

계차수열을 이용하여 일반항을 구할 때는 자연수 거듭제곱의 합에서 $n-1$ 항까지의 합을 많이 계산하게 됩니다.
따라서 아래의 공식도 기억해두고 활용하도록 합시다.

사실 <u>**끝항만 바뀐 형태**</u>이니 앞에서 외워두었다면 기억하는 것은 혼자 놀기만큼 쉬운 것 아닙니까? 음하핫.

◆ 자연수 거듭제곱의 $n-1$ 항까지의 합 ◆

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

[2] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

[3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3 = \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$

☀ 참고 7]
만일 계차수열 $\{b_n\}$이

<u>**등비수열이면 ①의 형태로**</u>
<u>**등차수열이면 ②의 형태로**</u>

구하는 것이 좋습니다. 왜냐하면 **등비수열**인 경우에는 $\sum$의 기호를 사용하는 <u>**공식이 없기 때문**</u>에 어차피 처음부터 나열하여 적는 것이 좋거든요.. 하지만 **등차수열**은 <u>**자연수 거듭제곱의 합의 공식**</u>을 이용할 수 있으므로 $\sum$의 기호를 사용하는 것이 계산이 간편하기 때문입니다.

☀ 참고 8]
만일 제 1계차수열이 등차수열이나 등비수열이 아니어서 그 일반항을 구할 수 없다면 <u>**제 2계차수열을 이용하여 제 1계차수열의 일반항을 구한 다음**</u> 다시 원수열의 일반항을 구하면 됩니다.

즉, 수열 $\{c_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 제 2계차수열이라고 하면

$$b_n = b_1 + (c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}) = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

로 b_n을 구한 다음 다시

$$a_n = a_1 + (b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

를 이용하여 구하면 되는 것입니다.
이하 계속 제 $3, 4, \cdots$ 계차수열에 대하여도 마찬가지로 구합니다.

문제 19) 수열 $3, 5, 9, 15, 23, \cdots$ 에서 383은 제 몇 항인가?

① 제15항 ② 제17항 ③ 제18항 ④ 제19항 ⑤ 제20항

[풀이]

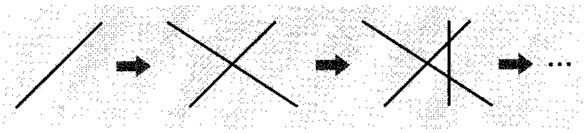
문제 20) 수열 $1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ 에서 제 20항을 구하면?

① $2^{19}-1$ ② $2^{19}+1$ ③ $2^{20}-1$

④ $2^{20}+1$ ⑤ $2^{21}-1$

[풀이]

문제 21) 평면에 1개의 직선을 그으면 평면은 2개의 영역으로 나누어진다. 또, 서로 만나는 2개의 직선을 그으면 평면은 4개의 영역으로 나누어진다.



이와 같이 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않고, 어느 두 직선도 평행하지 않게 10개의 직선을 그을 때, 평면이 나누어지는 영역의 개수를 구하여라.

[풀이]

문제 22) 3 이상의 자연수 n 을 3개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 가지수를 a_n이라 하자. 예를 들어

$3=1+1+1$이므로 $a_3=1$,

$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$이므로 $a_4=3$

이다. 이 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[풀이]

4. 군 수열(grouping progression)

군 수열이라고 해서 따로 정해진 수열이 있는 것은 아닙니다.
수열 전체로는 일정한 규칙을 찾기 어려우나 몇 개의 묶음(군)으로 나눌 경우에 그 **묶음 안에서 일정한 규칙을 가지는 수열**을 **군 수열(묶음수열)**이라고 하는 것입니다.
이를테면 다음과 같은 수열

$$1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1, \cdots$$

이 수열은 전체로서 일반적인 규칙 즉, 일반항을 표시하기는 어렵습니다.
하지만 수열을 다음과 같이 분해하면

$$(1), (2, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), (5, \cdots$$

하나의 묶음(군) 안에서는 등차수열이 되고 있음을 알 수 있지요?

이렇게 군으로 나타내었을 때, 이 수열의 규칙성을 파악하여 전체의 규칙도 파악하는 것입니다. 이러한 수열에서는 어떠한 것을 하나의 묶음으로 보는가가 중요합니다.
일반적인 기준은 없으나 직관적으로 수열이 나아가는 형태를 보고 파악하여야 합니다.

일반적으로 많이 나타나는 형태를 적어보고 각 문제에 따라 그 풀이 방법을 공부해봅시다.

(1) 군수열의 해법
㉠ 반복되는 것이 있으면 그것을 기준으로 묶어봅니다. **(위의 예)**

문제 23) 수열 $1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1, \cdots$을 군으로 나눈 수열 $(1), (2, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), (5, \cdots$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 이 수열의 n군의 첫째항을 구하여라.

(2) 이 수열의 n군의 합을 구하여라.

(3) 이 수열의 제 1군에서 제 n군까지의 모든 항의 합을 구하여라.

(4) 100번째 항의 수를 구하여라.

(5) 이 수열은 100번째 항까지 1은 몇 개가 나타나는가?

[해법]

이러한 군 수열의 해법은

첫째, 각 군의 첫째항의 수열을 파악합니다.

⬅ 이 수열은 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots ,n$

둘째, 군 안에서의 규칙성이나 군과 군사이의 규칙성을 파악합니다.

⬅ 이 수열은 군 안에서는 공차-1인 등차수열 즉, 1씩 감소하고 군 사이에서는 항의 수가 한 개씩 증가합니다.

[풀이]

문제 24) 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \cdots$의 첫째항부터 제 150항까지의 합은?

① 671 ② 665 ③ 656 ④ 621 ⑤ 601

[풀이]

㉡ 분수인 경우에는 분모나 분자가 일정한 것끼리 혹은 '분모+분자'가 같은 것끼리 묶어봅니다.

문제 25) 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \cdots$ 에서 $\frac{9}{15}$는 몇 번째항인가?

[풀이]

문제 26) 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \cdots$ 에서 $\frac{9}{15}$ 는 몇 번째항인가?

[풀이]

© <u>점열은 그 각각의 점을 $\frac{x\text{좌표}}{y\text{좌표}}$의 분수형태로 나타내어 분수수열로 만들어서 생각하면 됩니다.</u>

문제 27) 다음의 점열에서 $P_n(10, 10)$을 만족하는 n의 값은?

$$P_1(1,1), P_2(1,2), P_3(2,1), P_4(1,3), P_5(2,2), \cdots$$

[풀이]

ⓔ 행렬형식(바둑판식)의 문제는 대개
ⓐ 1행의 수열을 파악하여 봅니다.
ⓑ 1열의 수열을 파악하여 봅니다.
ⓒ 대각선의 수열을 파악하여 봅니다.
이 때는 주로 계차를 구하여 보면 그 형태의 파악이 쉽게 됩니다....*^^*
ⓓ '행번호+열번호'가 일정한 끼리를 하나의 묶음으로 해봅니다.

문제 28) 자연수를 오른쪽과 같이 배열한다.

1	4	9	16	25
2	3	8	15	24
5	6	7	14	23
10	11	12	13	22
17	18	19	20	21
26	27	28		

이 때, 가로로 배열된 줄을 제 1행, 제 2행, … 이라 부르고, 세로로 배열된 줄을 왼쪽에서부터 제 1열, 제 2열, … 이라 부르기로 한다.
(1) 제 1행의 처음 10개 수의 합을 구하여라.
(2) 제 1열의 처음 10개 수의 합을 구하여라.
(3) 제 3행과 10열의 교차점의 수는?
[풀이]

문제 29) 오른쪽 그림과 같이 규칙적으로 배열된 수들이 있다. 이 때, 10행의 모든 수들의 합은?

2					
4	6				
8	10	12			
14	16	18	20		
22	24	26	28	30	$\cdots$
		$\cdots\cdots$			

[풀이]

문제 30) 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$를 오른쪽 그림과 같이 배열하였을 때, ○으로 표시된 수들의 수열

$4,\ 6,\ 14,\ 20,\ 32,\ \cdots$

를 $\{a_n\}$이라 한다. 이 때, a_{20}의 값은?

1	4	5	16	17	36	$\cdots$
2	3	6	15	18	35	
9	8	7	14	19	34	
10	11	12	13	20	33	
25	24	23	22	21	32	
26	27	28	29	30	31	
$\vdots$						

① 418 ② 420 ③ 422
④ 424 ⑤ 426

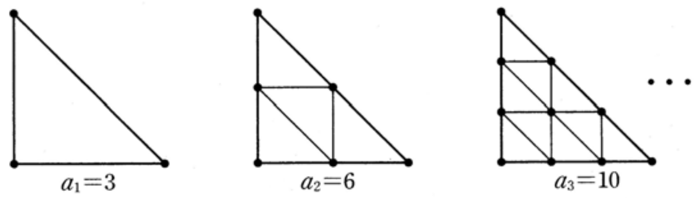
[풀이]

문제 31) 짝수인 자연수의 거듭제곱을 오른쪽 표와 같이 계속 나열할 때, 8^6과 같은 수는 모두 몇 번 나타나는지 구하시오.

2	2^2	2^3	2^4	$\cdots$
4	4^2	4^3	4^4	$\cdots$
6	6^2	6^3	6^4	$\cdots$
8	8^2	8^3	8^4	$\cdots$
10	10^2	10^3	10^4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

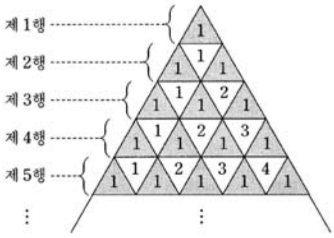
[풀이]

문제 32) 다음 그림과 같이 직각이등변 삼각형의 각 변을 n등분하는 점들을 각 변에 평행하게 잇는다. 각 선분들의 교점인 꼭지점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.



[풀이]

문제 33) 오른쪽 그림과 같은 삼각형 모양의 빈 칸에 자연수를 다음 규칙에 따라 나열하였다.
이 때, 그림의 제 1행부터 제 10행까지 나열된 모든 수의 합을 구하시오.



|규칙|

(가) ▲ 모양의 빈 칸에는 모두 1을 나열한다.

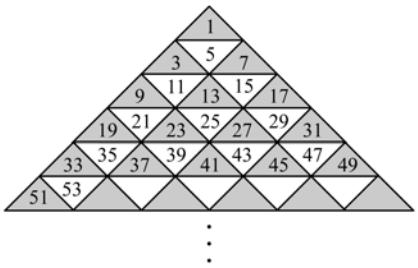
(나) 제 n행의 ▽모양의 빈 칸에는 왼쪽부터 순서대로 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 나열한다.$(n \geqq 2)$

[풀이]

문제 34) 아래 그림과 같이 홀수를 삼각형 모양으로 배열하고 어두운 부분에 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열

$$1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19,\ \cdots$$

을 만들었다. 이 수열의 제 66 항을 구하시오.



[풀이]

문제 35) 다음과 같이 나열된 모든 수들의 합은?

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{1} & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & & \\ & \cdots & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \cdots & \frac{10}{10} \end{array}$$

① $\frac{45}{2}$ ② 25 ③ $\frac{55}{2}$ ④ 30 ⑤ $\frac{65}{2}$

[풀이]

문제 36) $\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=2}^{10}k+\sum_{k=3}^{10}k+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k$의 값은?

① 380 ② 381 ③ 382 ④ 384 ⑤ 385

[풀이]

문제 37) 10부터 99까지의 두 자리의 정수를 차례로 이어 붙여 만든 수 $\mathrm{N}=1011121314\cdots9899$가 있다. N의 각 자리수의 합

$$1+0+1+1+1+2+1+3+1+4+\cdots+9+8+9+9$$

의 값은?

① 855 ② 857 ③ 859 ④ 961 ⑤ 963

[풀이]

문제 38) 그림과 같이 삼각형 모양으로 수를 나열하는데 제 n 행에 n이 홀수이면

$n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1$

n이 짝수이면

$2n-1,\ 2n-2,\ 2n-3,\ \cdots,\ n$

으로 수를 나열하였다. 이 때, 제 2행부터 제 10행까지 각 행의 첫째항과 끝항들의 총합을 구하시오.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 2 & & \\ & 3 & & 4 & & 5 & \\ 7 & & 6 & & 5 & & 4 \\ \iddots & & & \vdots & & & \ddots \\ 19 & & & \cdots & & & 10 \end{array}$$

[풀이]

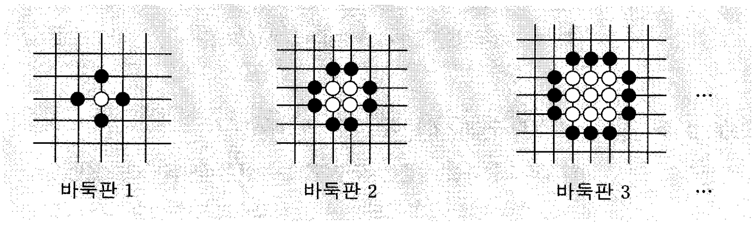
문제 39) 그림과 같이 배열된 100개의 수의 총합과 같은 것은?

1	2	3	·	⋯	·	8	9	10
2	4	6	·	⋯	·	16	18	20
3	6	9	·	⋯	·	24	27	30
				⋯				
				⋯				
10	20	30	·	⋯	·	80	90	100

① $\sum_{k=1}^{100} k$　② $\sum_{k=1}^{10} k^2$　③ $10\sum_{k=1}^{10} k$　④ $\sum_{k=1}^{10} k^3$　⑤ $10\sum_{k=1}^{10} k^2$

[풀이]

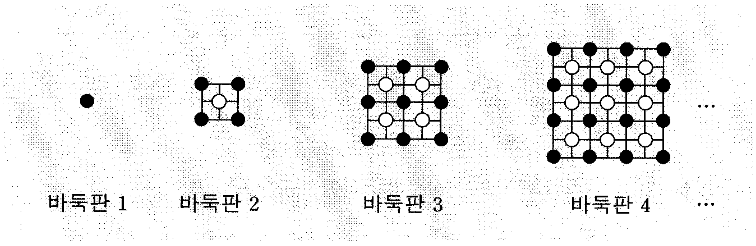
문제 40) 10개의 바둑판에 다음 그림과 같은 규칙으로 흰 돌과 검은 돌을 놓을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 흰 돌과 검은 돌의 개수의 총합은?



① 565 ② 575 ③ 585 ④ 595 ⑤ 605

[풀이]

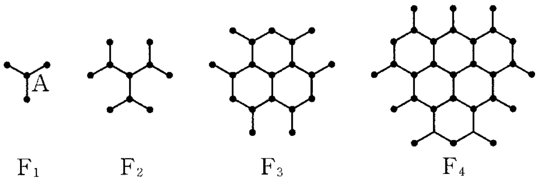
문제 41) 10개의 바둑판에 흰 돌과 검은 돌을 다음과 같은 규칙으로 놓았을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 모든 바둑돌의 개수는?



① 181 ② 221 ③ 570 ④ 610 ⑤ 670

[풀이]

문제 42) 다음 그림과 같이 한 점 A에서 시작하여 길이가 1인 선분을 추가하여 정육각형 구조의 도형 F_1, F_2, F_3, $\cdots$, F_n을 만들어 나간다. F_1의 새로운 세 꼭지점에 길이가 1인 선분을 추가하여 F_2를 만들고, $\cdots$, F_{n-1}의 새로운 꼭지점에 길이가 1인 선분을 추가하여 F_n을 만들어 도형 F_n에 있는 모든 꼭지점의 개수를 v_n이라 하면 $v_1=4$, $v_2=10$, $v_3=19$, $v_4=31$, $\cdots$이다. 이 때, v_{10}의 값은?



① 146 ② 156 ③ 166 ④ 176 ⑤ 186

[풀이]

5. 망원급수

이를테면

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$$

처럼 수열의 합을 구함에 있어서 k에 대하여 연속하는 항으로 나타난 수열의 합을 구할 때, 가운데의 항은 모두 소거되고 처음과 끝만 바로 보인다고 하여 붙여진 이름이다.

특징은 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$처럼

가운데 minus가 있고 k에 대하여 연속하는 항으로 된 수열의 합입니다. 그 결과는 큰 쪽 (a_{k+1})에 n을 대입한 것과 작은 쪽 (a_k)에 1을 대입한 것으로 남게 됩니다.

이를 응용하면 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)$인 경우는 $(k+2)-k=2$이므로

큰 쪽 (a_{k+2})에 $n, n-1$을 대입하고 작은 쪽 (a_k)에 $1, 2$를 대입하면 그 결과가 얻어집니다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)=a_{n+2}+a_{n+1}-a_1-a_2$$

가 결과로 나타납니다.

또, $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+3}-a_k)$와 같은 경우는 $(k+3)-k=3$이므로 큰 쪽과 작은 쪽에 3개씩이 남게 되는 것입니다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+3}-a_3)=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}-a_1-a_2-a_3$$

이처럼 결과의 차에 의하여 큰 쪽과 작은 쪽에 대입하는 수의 개수를 결정하게 되는 것입니다.

이 용어가 고등학교에서는 쓰여 지지는 않으나 이런 급수는 흔히 볼 수 있으므로 내용을 알아두면 매우 편리하게 계산할 수 있습니다.

◆ 망원급수의 해법 ◆

[1] 분수식은 부분분수로 나눈다.
[2] $\log$가 포함된 식은 $\log B-\log A$의 꼴로 변형한다.
[3] 무리식은 유리화하거나 이중근호를 푼다.

[1] 분수식은 부분분수로 나눈다.

분모가 여러 인수의 곱으로 되어 있는 경우에는 각각의 인수들을 분모로 하는 분수들의 차로 분수를 분해하여 망원급수를 적용합니다.

$$\frac{C}{A\cdot B}=\frac{C}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

만일 $B-A=C$이면 $\dfrac{C}{A\cdot B}=\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}$

을 적용하여 부분분수로 분해하면 됩니다.

문제 43) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+1997}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1997}{999}$ ② $\dfrac{1997}{1998}$ ③ $\dfrac{999}{1997}$ ④ $\dfrac{999}{1998}$ ⑤ $\dfrac{1998}{999}$

[풀이]

이 과정에서 중간에 소거되는 수를 일일이 적어서 계산하면 번거로우므로 이 계산과정을 생략하는 것이 망원급수의 해법입니다.

문제 44) n이 자연수일 때 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 A^n의 $(2,1)$ 성분을 a_n이라 하자. 이 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{49}\frac{200}{a_n\cdot a_{n+1}}$의 값은?

[풀이]

[2] <u>$\log$가 포함된 식은 $\log B-\log A$의 꼴로 변형한다.</u>

이 경우는 로그의 성질

$$\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$$

를 적용하여 망원급수를 씁니다.

문제 45) 급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\log\left(\frac{1}{k}+1\right)$의 값을 구하여라.

[풀이]

[3] <u>무리식은 유리화하거나 이중근호를 풉니다.</u>

문제 46) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(2n-1)^2$으로 나타내어질 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\sqrt{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_k-1}}$의 값을 구하여라.

[풀이]

문제 47) 급수 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$의 값을 구하면?

[풀이]

문제 48) $\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{(k+1)!}$의 값은?

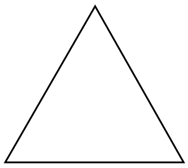
① $1-\frac{1}{99!}$ ② $1-\frac{1}{100!}$ ③ $1-\frac{1}{101!}$ ④ $1+\frac{1}{100!}$ ⑤ $1+\frac{1}{101!}$

[풀이]

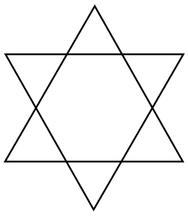
문제 49) 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=(-1)^n(a_n+a_{n+1})$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}b_n$의 값을 구하여라.

[풀이]

문제 50) 평면 위에 중심이 일치하는 n개의 합동인 정삼각형을 그려 n개의 정삼각형에 의해서 분할된 평면의 최대 개수를 a_n이라 하자. 다음 그림은 $n=1,\ 2$일 때의 예이다.



$a_1=2$



$a_2=8$

이 때, $\sum_{n=2}^{10}\frac{3}{a_n-2}$의 값은?

① $\frac{17}{20}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{19}{20}$ ④ 1 ⑤ $\frac{21}{20}$

[풀이]

6. 99수열의 합

99수열이란 다음 수열

$$2+22+222+2222+22222+\cdots \qquad \cdots ①$$

$$12+1212+121212+12121212+\cdots \qquad \cdots ②$$

처럼 같은 수가 순환소수처럼 반복해서 나타나는 수열을 말합니다.

이런 수열의 합은 공식화하기가 매우 간단합니다.
순환소수를 분수로 고치듯이 ①의 수열을 순환마디가 하나이므로 $\frac{2}{9}$를 묶어내면

$$\frac{2}{9}(9+99+999+9999+99999+\cdots$$

가 되고 ②의 수열을 순환마디가 두 개이므로 $\frac{12}{99}$를 묶어내면

$\frac{12}{99}(99+9999+999999+99999999+\cdots$

가 되어 뒤의 수열이 모두 9로 반복하는 수열로 만든 다음 이를 10^n-1의 꼴로 고쳐서 공비가 10인 등비수열의 합으로 구합니다.

①의 일반항은 $\frac{2}{9}(10^n-1)$이고

②의 일반항은 $\frac{12}{99}(10^{2n}-1)$이 됩니다.

따라서 ①의 합은

$$\frac{2}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)\}$$
$$=\frac{2}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-n\}$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{2}{9}n=\frac{20(10^n-1)}{81}-\frac{2}{9}n$$

으로 간단히 구할 수가 있습니다.

②의 합은

$$\frac{12}{99}\{(10-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+\cdots+(10^{2n}-1)\}$$
$$=\frac{12}{99}\{(10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n})-n\}$$
$$=\frac{12}{99}\cdot\left\{\frac{100(100^n-1)}{100-1}-n\right\}=\frac{12}{99}\cdot\left\{\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}\right\}$$
$$=\frac{12(100^{n+1}-99n-100)}{9801}$$

처럼 구하면 됩니다.

이처럼 순환소수로 묶어내고 뒤의 수열을 모두 9로 만들어 준다고 해서 붙인 이름입니다......*^^*

7. 멱급수 (power Series)

(1) 멱급수의 뜻

이를테면

$1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^{3+}\cdots+n\cdot3^n$

를 관찰하여 보면

앞의 인수는 등차수열 $1, 2, 3, 4, \cdots, n$

뒤의 인수는 등비수열 $3, 3^2, 3^3, 3^4, \cdots, 3^n$

임을 알 수가 있습니다.

이와 같이 등차수열과 등비수열 형태의 대응하는 항끼리 서로 곱해서 얻어지는 수열의 합을 멱급수라고 합니다.

즉, 수열 $\{a_n\}$을 등차수열, 수열 $\{b_n\}$을 등비수열을 이룰 때,

$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n$

의 꼴을 말합니다.

(2) 멱급수의 합

이런 멱급수의 합을 구할 때는 등비수열의 합의 공식을 유도할 때, 적용한 방식을 똑같이 적용하여 구합니다. 모르면 등비수열 보삼.

◆ 멱급수의 해법 ◆

첫째 : 주어진 급수 S에 등비수열의 공비 r을 양변에 곱한다.
둘째 : 변변 서로 빼서 $S-rS$꼴로 만들어 합을 구한다.

문제 51) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$ 의 합을 구하면?

[풀이]

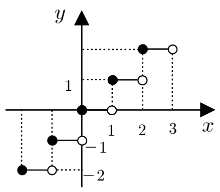
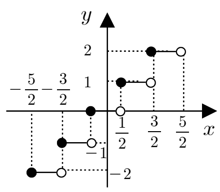
문제 52) 급수 $S=1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$의 합을 구하면?

① $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$ ② $4+\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$ ③ $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ ④ $4+\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ ⑤ $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$

[풀이]

8. 가우스 함수

(1) 가우스 함수의 정의

기　호	$[x]$	$\{x\}$
정　의	**x보다 크지 않은 최대 정수**	x에 가장 가까운 정수 (단, 중간값 일 때는 큰 정수)
수학적인 의미	$n \leqq x < n+1$ 일 때 $[x]=n$	$m-\frac{1}{2} \leqq x < m+\frac{1}{2}$일 때 $\{x\}=m$
계산방법	양의 소수를 버린다	소수를 반올림한다
그 래 프		

(2) 가우스 함수의 성질

① $[x] \leqq x < [x]+1$

② $x-1 < [x] \leqq x$

③ $[x \pm a]=[x] \pm a$ (단, a는 정수)

④ $[x]+[y] \leqq [x+y]$

⑤ $[-x]=\begin{cases} -[x]-1 & (x\text{가 정수가 아닌 경우}) \\ -[x] & (x\text{가 정수인 경우}) \end{cases}$

⑥ $\{x\}-0.5 \leqq x < \{x\}+0.5$

⑦ $\{x \pm a\}=\{x\} \pm a$ (단, a 는 정수)

☀ 참고 9]

① $[ax] \neq a[x]$ (단, a 는 정수)

② 정수가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $[x]+[-x] \neq 0$

예) $x=-0.5$

③ 모든 실수 x, y 에 대하여 $[x+y] \neq [x]+[y]$

예) $x=1.5$, $y=1.7$

(3) 가우스 함수의 응용

① 자연수 n 의 양의 약수의 개수를 $k(n)$ 이라 하면

$$k(1)+k(2)+\cdots+k(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]$$

② 1 에서 n 까지의 자연수 중에서 a 의 배수의 개수 $=\left[\frac{n}{a}\right]$

③ 1 에서 n 까지의 자연수 중에서 a, b 의 공배수의 개수 $=\left[\frac{n}{ab}\right]$

(단, a,b 는 서로 소)

④ 1 에서 n 까지의 자연수 중에서 a 또는 b 의 배수의 개수

$$=\left[\frac{n}{a}\right]+\left[\frac{n}{b}\right]-\left[\frac{n}{ab}\right]$$

⑤ $n! = 2^a 3^b 5^c \cdots x^k \cdots$일 때,

$k = \left[\dfrac{n}{x}\right] + \left[\dfrac{n}{x^2}\right] + \cdots + \left[\dfrac{n}{x^m}\right]$ (단, x 는 소수, $n \geq x^m$)

⑥ 임의의 양수 x 의 소수 부분 = $x - [x]$

⑦ a, b 가 자연수일 때, a 를 b 로 나눈 나머지 = $a - b\left[\dfrac{a}{b}\right]$

⑧ 자연수 n 의 일의 자리수 = $n - 10\left[\dfrac{n}{10}\right]$

⑨ $[x+y] - ([x]+[y]) = 0$ 또는 1

⑩ $\log A = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면,

$[\log A] = n$, $\log A - [\log A] = \alpha$

문제 53) $33! = 33 \times 32 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ 을 계산했을 때, 끝자리의 0 의 개수를 구하시오.

[풀이]

문제 54) 1에서 200까지의 자연수를 모두 곱한 수를 소인수분해하여 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 199 \times 200 = 2^{197} \times 3^{97} \times 5^{49} \times 7^n \times \cdots \times 199$ 로 나타낼 때, 7의 지수 n 의 값을 구하면?

① 7 ② 17 ③ 25 ④ 27 ⑤ 32

[풀이]

문제 55) 1에서 n까지의 자연수를 모두 곱한 수를 $n!$이라 할 때, $1996!$을 14진법으로 표시한 수의 끝자리를 포함한 연속된 0의 개수를 바르게 나타낸 항은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\left[\frac{1996}{2}\right]+\left[\frac{1996}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{1996}{2^{10}}\right]$

② $\left[\frac{1996}{2}\right]+2\left[\frac{1996}{2^2}\right]+\cdots+10\left[\frac{1996}{2^{10}}\right]$

③ $\left[\frac{1996}{7}\right]+\left[\frac{1996}{7^2}\right]+\left[\frac{1996}{7^3}\right]$

④ $\left[\frac{1996}{7}\right]+2\left[\frac{1996}{7^2}\right]+3\left[\frac{1996}{7^3}\right]$

⑤ $\left[\frac{1996}{14}\right]+\left[\frac{1996}{14^2}\right]$

[풀이]

문제 56) 아래에서 제 n행은 n의 양의 약수를 나열한 것이다. 제 1행부터 제 20행까지 나열된 수의 개수를 구하시오.

제 1행	1							
제 2행	1	2						
제 3행	1		3					
제 4행	1	2		4				
제 5행	1				5			
제 6행	1	2	3			6		
제 7행	1						7	
제 8행	1	2		4				8
⋮				⋮				

[풀이]

문제 57) 양수 x 에 대하여 $< x >$ 는 x 보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타내기로 한다. 예를 들면, $< 2 > = 2$, $< 2.5 > = 3$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1 = 10,\ a_n = a_{< \frac{n}{2} >} + 1\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

로 정의할 때, a_{50} 의 값을 구하시오.

[풀이]

문제 58) 다음은 a, b 가 자연수일 때, a 를 b 로 나눈 나머지를 구하는 과정이다. (가)에 알맞은 것을 고르면?

|증명|

a 를 b 로 나누었을 때의 몫을 q , 나머지를 r 라 하면

$a = \boxed{} + r\ \ (0 \leqq r < b)$ ⋯ ⋯ ①

$b > 0$ 이므로 ①의 양변을 b 로 나누면

$\dfrac{a}{b} = \boxed{} + \dfrac{r}{b}\ \ \left(\boxed{} \leqq \dfrac{r}{b} < \boxed{} \right)$

따라서 $\left[\dfrac{a}{b}\right] = \boxed{}$ 이고, ①에서 $r = a - \boxed{} = \boxed{(가)}$

① $a - \dfrac{a}{b}$　　② $a - b\left[\dfrac{b}{a}\right]$　　③ $b - a\left[\dfrac{b}{a}\right]$

④ $a - b\left[\dfrac{a}{b}\right]$　　⑤ $b - a\left[\dfrac{a}{b}\right]$

[풀이]

문제 59) $< x >$ 를 x 의 양의 약수의 개수라 정의하고 $a = < 2^{1996} >^{1996}$ 일 때, $a - \left[\dfrac{a}{10}\right] \times 10$ 의 값을 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 0　② 1　③ 6　④ 8　⑤ 9

[풀이]

문제 60) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = n-10\left[\frac{n}{10}\right]$ $(n=1, 2, 3, 4, \cdots)$ 일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$의 값을 구하시오. (단, $[n]$은 n보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[풀이]

문제 61) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = 4^n - 5\left[\frac{4^n}{5}\right]$일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

[풀이]

문제 62) 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = n! - 5\left[\frac{n!}{5}\right] \quad (n=1\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족할 때, $\sum_{n=1}^{2006} a_n$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이고, $n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$이다)

[풀이]

문제 63) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$a_n = n - 3\left[\dfrac{n}{3}\right]$, $b_n = n^2 - 3\left[\dfrac{n^2}{3}\right]$ (n은 자연수)

일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

|보기|

ㄱ. $a_{2007} = 2$

ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k-1} + b_{3k-1} = 3$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2007}(a_k - b_k) = 669$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[풀이]

9. 진법을 활용한 수열

나열된 수들이 특정한 수들로 이루어져 있을 때는 진법을 이용한 수열이 아닌지를 의심해 본다.

문제 64) 0, 1 또는 2를 써서 만든 자연수를 작은 것부터 차례로 나열한 수열

$1,\ 2,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22,\ 100,\ 101,\ 102,\ 110,\ 111,$
$112, 120,\ 121,\ 122,\ 200,\ \cdots$

에서 12220은 몇 번째 항인가?

① 156　② 157　③ 158　④ 159　⑤ 160

[풀이]

문제 65) $3^k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$의 꼴의 수와 이와 같은 꼴의 수들의 합으로 표시되는 수들을 작은 것부터 차례로 늘어놓아 만든 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ \cdots$

이 때, a_{62}의 값은? (단, 3^k의 꼴인 수 중 같은 수끼리 더하여 만든 수는 수열 $\{a_n\}$의 항이 아니다.)

[풀이]

문제 66) 자연수 n을 이진법의 수로 나타내었을 때, 그 이진법의 수가 k자리의 수이면 $a_n=k$로 정의한다. 예를 들면 $7=111_{(2)}$이므로 $a_7=3$이고, $8=1000_{(2)}$이므로 $a_8=4$이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20항까지의 합을 구하시오.

[풀이]

문제 67) $k=1,2,3,\cdots$에 대하여 a_k가 세 수 $0,1,2$ 중 하나의 값을 가질 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}3^{n-1}a_n=209$가 성립한다. 이 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}{a_n}^2$의 값을 구하시오.

[풀이]

문제 68) 1이 두 번만 나타나는 이진법의 수를 작은 수부터 차례로 배열하여 얻은 수열 $11_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, 1001_{(2)}, 1010_{(2)}, 1100_{(2)}, \cdots$의 제 56항과 같은 수는?

① 2^9+1 ② $2^{10}+2^9$ ③ $2^{11}+1$ ④ $2^{11}+2^{10}$ ⑤ $2^{13}+1$

[풀이]

문제 69) 수열 $\{a_n\}$은 $0, 1, 2$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수를 크기 순서로 나열한 것이다. 즉, $\{a_n\}$은

$$1, 2, 10, 11, \ 12, 20, 21, 22, 100, 101, \cdots, \ 2222$$

와 같다. 이 때, 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n = (a_n$의 1의 개수)로 정의한다. 다음 표는 각각의 a_n 에 대하여 결정되는 b_n 을 나타낸 것이다.

a_n	1	2	10	11	12	$\cdots$	2002	$\cdots$	2222
b_n	1	0	1	2	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0

이 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\{a_n\}$의 항의 개수는 81이다.

ㄴ. $a_{26} = 222$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{26} b_n = 27$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

10. 특정한 조건이 주어져서 합을 구하는 경우

등차수열도 아니고, 등비수열도 아니고, 자연수의 거듭제곱도 아니며, 앞에서 분석한 망원급수의 꼴도 아닌데, 많은 양의 합을 구하라는 문제는 언제나 문제속에 특정한 조건이 주어져서 이것을 통째로 이용하여 푼다.

문제 70) 0 또는 3을 항으로 갖는 수열 $\{a_n\}$이 있다.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{4^k} = \alpha$라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{a_k}-1}{4^k}$의 값을 α를 써서 나타내면?

① -3α　② -2α　③ $-\frac{2}{3}\alpha$　④ $2-3\alpha$　⑤ $3-\alpha$

[풀이]

문제 71) 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} na_n = 10$을 만족시킨다. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n+1}$이 수렴할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n - a_{n+1})$의 값을 구하여라.

[풀이]

11. 주기성을 갖고 있는 수열

몇 개의 항을 추론했는데도 불구하고 규칙이 쉽게 발견되지 않았을 때는 일정한 주기를 가지고 있진 않은지 의심해 보아야 한다.

문제 72) 이차정사각행렬 A, B가 다음 두 조건

$$A+B=O,\quad AB=E$$

를 만족할 때, $\sum_{k=1}^{2005} A^k$을 간단히 하면? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

① E ② A ③ $-E$ ④ $-A$ ⑤ O

[풀이]

문제 73) 다음과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$이고

$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

이 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은?

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

[풀이]

문제 74) 음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $P_n(a_n, b_n)$이라 하자.

(ㄱ) $a_0 = 1$, $b_0 = 0$

(ㄴ) 점 $P_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$은 점 $P_n(a_n, b_n)$에서 원 $x^2 + y^2 = 1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{18}$만큼 이동한 점이다.

이 때, $a_n = b_n$을 만족시키는 n은 $\boxed{(가)}$

그리고 $c_k = a_{18k}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$라 하면, 수열 $\{c_k\}$는 공비가 $\boxed{(나)}$인 등비수열이다. 위의 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	존재하지 않는다.	$-\frac{1}{2}$
②	존재하지 않는다.	-1
③	존재한다.	$-\frac{1}{2}$
④	존재한다.	-1
⑤	존재한다.	$\frac{1}{2}$

[풀이]

문제 75) 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점일 때, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 $\mathrm{P_n}$은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 $\mathrm{P_n}$이 제 1사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.
(나) 점 $\mathrm{P_n}$이 제 2사분면 또는 제 4사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 x축에 대하여 대칭 이동시킨 점이다.
(다) 점 $\mathrm{P_n}$이 제 3사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 y축에 대하여 대칭 이동시킨 점이다.

점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 $\mathrm{P_{2007}}$의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

[풀이]

문제 76) 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

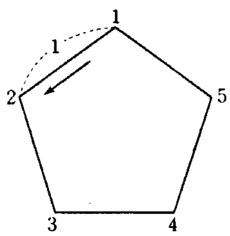
(가) 점 $\mathrm{P_1}$의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
(나) 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표가 $(a,\ b)$일 때,
$b<2^a$이면 점 $\mathrm{P_{n+1}}$의 좌표는 $(a,\ b+1)$이고
$b=2^a$이면 점 $\mathrm{P_{n+1}}$의 좌표는 $(a+1,\ 1)$이다.

점 $\mathrm{P_n}$의 좌표가 $(10,\ 2^{10})$일 때, n의 값은?

① $2^{10}-2$ ② $2^{10}+2$ ③ $2^{11}-2$ ④ 2^{11} ⑤ $2^{11}+2$

[풀이]

문제 77) 점 P는 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형의 꼭지점을 시계 반대 방향으로 움직이는데, $i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$에 위치하면 다음에는 변을 따라 i만큼 이동한다. 점 P가 처음 1에서 출발하여 n번 움직인 후의 위치를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_1=2,\ a_2=4$이다. 이 때, 점 P가 처음 1에서 출발하여 a_{2006}에 올 때까지 움직인 거리의 합은?



① 5019 ② 5017 ③ 5015 ④ 5013 ⑤ 5011

[풀이]

문제 78) 정 n각형의 꼭지점을 시계 반대 방향으로 차례로 A_1, A_2, $\mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_n$이라 하고, 꼭지점 $\mathrm{A}_i\,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$에 대응하는 실수 값을 a_i라고 하자. 꼭지점 A_i에 대응하는 실수값은 인접하는 두 꼭지점에 대응하는 실수값의 합과 같고, $a_1=1$, $a_2=3$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $n>50$)

|보기|

ㄱ. $a_{20}=2$ ㄴ. n은 6의 배수이다. ㄷ. $\sum_{k=1}^{50} a_k = 4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[풀이]

답안지

1) ①
2) 43
3) 160
4) ①
5) ④
6) 190
7) 7
8) ⑤
9) 440
10) ④
11) ②
12) ⑤
13) ④
14) ④
15) 360
16) 95
17) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$
18) 500
19) ⑤
20) ③
21) 56
22) 171
23) (1) n (2) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (3) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (4) 6 (5) 13
24) ①
25) 114
26) 262
27) $n=181$
28) (1) 385 (2) 295 (3) 98
29) 1010
30) ②
31) 6
32) 285
33) 220
34) 241
35) ⑤
36) ⑤
37) ①
38) 153
39) ④
40) ⑤
41) ⑤
42) ③
43) ①
44) 49
45) 2
46) 10
47) 4
48) ③
49) 255
50) ②
51) $\frac{9}{4}-\left(\frac{9}{4}+\frac{n}{2}\right)\times\frac{1}{3^n}$
52) ①
53) 7
54) ⑤
55) ③
56) 66
57) 16
58) ④
59) ②
60) 450
61) 50
62) 8
63) ⑤
64) ④
65) 363
66) 74
67) 13
68) ③
69) ④
70) ③
71) 19
72) ②
73) ①
74) ②
75) ①
76) ③
77) ④
78) ⑤